НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

В. М. Осипов

(Представлено профессором, доктором техн. наук. И. Д. Кутявиным)

В последние годы в нашей стране и за рубежом достигнуты серьезные успехи в технике использования энергии ветра. Созданы новые более совершенные конструкции ветродвигателей с высокими технико-экономическими показателями. Проведенные исследования и имеющийся опыт эксплуатации со всей очевидностью показывают экономическую целесообразность использования энергии ветра для целей сельскохозяйственной электрификации. Широкое использование энергии ветра для повышения энерговооруженности социалистического сельского хозяйства путем работы ветроэлектростанций (ВЭС) в местных системах, а также параллельно с мощными сетями государственных энергосистем ставит перед ветроэнергетиками ряд новых задач. Эти задачи обусловлены особенностью энергии ветра, использование которой в энергетической системе в общем случае создает особенности в отношении режима ее работы и оказывает влияние на ее технико-экономические показатели. Исследование этих вопросов неизбежно при широком использовании ВЭС для целей электрификации. Существующая методика ветроэнергетических расчетов не в состоянии решить поставленные задачи вследствие слабости ее теоретической базы. Кроме того, согласно существующей методике определяемые величины получаются в результате суммирования нескольких слагаемых, каждое из которых соответствует целому значению скорости ветра, так как статистическая совокупность по повторяемости ветров обычно задается в виде ломаной линии, и основная характеристика ветродвигателя не имеет аналитического выражения. Расчеты обычно ведутся в форме таблиц, причем широко используется вариантный принцип. Эти обстоятельства делают такие расчеты весьма трудоемкими, особенно в случае, когда их необходимо проводить для нескольких значений среднегодовой скорости ветра или других паспортных данных ВЭС, при этом, очевидно, анализ влияния различных факторов чрезвычайно затруднен и может быть выполнен только путем сравнения различных вариантов расчета. Таким образом, существующая методика ветроэнергетических расчетов теоретически весьма несовершенна, а практически неудобна в силу своей трудоемкости.

В свете сказанного нам представляется актуальной задачей изменение существующей методики с целью ее максимального упрощения с сохранением необходимой точности, а также с целью ее применения к решению более сложных вопросов ветроиспользования.

В настоящей работе сделана попытка в этом направлении. При этом мы исходили из следующих предпосылок:

1. Скорость ветра, определяющая его энергетические возможности, есть непрерывная случайная величина, могущая изменяться в весьма широком диапазоне значений. Следовательно, мощность ветрового потока является также непрерывной случайной величиной, в чем, как известно, и состоит особенность ветровой энергии.

2. Ветер как энергоноситель в силу сказанного подчиняется закономерностям случайных величин и, следовательно, теория вероятностей — отрасль математики, изучающая эти закономерности, — должна служить теоретической основой ветроэнергетики.

Основные понятия

Случайная величина считается определенной, если известна некоторая функция, обладающая тем свойством, что произведение $f(v)\Delta v$ равно вероятности попадания случайной величины v в интервал между v и $v+\Delta v$ [1, 2]. С другой стороны, согласно математическому (статистическому) понятию вероятность [1], вероятность того, что скорость ветра v окажется внутри интервала $v+\Delta v$, равна отношению $\frac{\Delta\tau}{T}$, где $\Delta\tau$ — число часов в году, в течение которых будут наблюдаться все скорости указанного интервала; T — годовое число часов.

Таким образом, имеем:

$$\frac{\Delta\tau}{T}=f(v)\,\Delta v, \tag{1}$$

или, поделив обе части равенства на Δv и переходя к пределу, получим:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{d\tau}{dv}=f(v). \tag{2}$$

Функция $f(v)$, определяемая таким образом, называется функцией распределения плотности вероятности случайной величины v.

В ветроэнергетике используют некоторую среднюю за интервал Δv величину плотности вероятности, причем выбирают $\Delta v=1$, тогда средняя за интервал плотность

$$\frac{\Delta\tau}{T\Delta v}=\frac{\Delta\tau}{T},$$

т. е. оказывается численно равной вероятности попадания величины v в данный интервал $\Delta v=1$; эту последнюю и называют повторяемостью.

Таким образом, повторяемость есть не что иное, как средняя за интервал $\Delta v=1$ плотность вероятности, численно равная вероятности неравенства $B(v\leqslant\varepsilon\leqslant v+1)$ т. е. вероятности попадания величины v в интервал между v и $v+1$.

Имея функцию распределения, легко получить основные числовые характеристики случайной величины — моменты. Момент k того порядка равен математическому ожиданию k-того порядка [1, 2], т. е.

$$M_k(v)=\int_a^b v^k f(v)\,dv. \tag{3}$$

Из определения функции распределения следует, что момент нулевого порядка равен вероятности неравенства

$$M_0(v)=B(a\leqslant v\leqslant b)=\int_a^b f(v)\,dv.$$

Если интегрирование охватывает все наблюдаемые скорости, то, очевидно:

$$B(a\leqslant v\leqslant b)=\int_a^b f(v)\,dv=1,$$

т. е. площадь под кривой распределения равна единице.

Случайную величину можно определить, используя иную функцию, чем функция распределения плотности вероятности $f(v)$. График этой функции широко используется в энергетике для оценки нагрузки в годовом разрезе и получил название графика по продолжительности. Последний дает наглядное представление о том, сколько часов в году будут наблюдаться значения скорости, бо́льшие и меньшие, чем данное значение v_1 (рис. 1).

Величина t_{v_1} означает годовую продолжительность скоростей, бо́льших, чем v_1, а $T - t_{v_1}$ — продолжительность скорости, меньших v_1. В относительных единицах $\left(\text{т. е. } \frac{t_{v_1}}{T} \text{ и } \frac{T - t_{v_1}}{T}\right)$ это будет означать вероятность встретить скорость, соответственно большую, чем v_1, и меньшую, чем v_1. Таким образом, можем написать очевидное равенство:

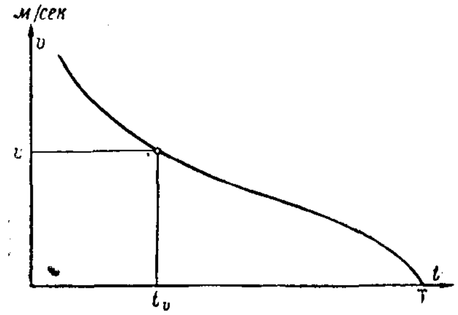

Рис. 1.

$$\frac{T - t_{v_1}}{T} = B(0 \leqslant v \leqslant v_1).$$

С другой стороны,

$$B(0 \leqslant v \leqslant v_1) = \int_0^{v_1} f(v)\, dv$$

и, следовательно,

$$\frac{T - t_{v_1}}{T} = \int_0^{v_1} f(v)\, dv.$$

Вообще можем написать:

$$\frac{T - t}{T} = \int_0^{v} f(v)\, dv. \qquad (4)$$

Дифференцируя по переменному верхнему пределу, получим:

$$\frac{d(T - t)}{T\, dv} = -\frac{dt}{T\, dv} = f(v). \qquad (5)$$

Последнее равенство устанавливает связь между уравнением графика по продолжительности и функцией распределения плотности вероятности. Оно оказывается весьма полезным для наших целей.

Из (4) будем иметь:

$$t = t(v) = T\left[1 - \int_0^{v} f(v)\, dv\right].$$

Обозначим:

$$F(v) = \int_0^{v} f(v)\, dv, \qquad (6)$$

тогда получим:

$$t = T[1 - F(v)]. \qquad (7)$$

Функция $F(v)$ называется интегральной функцией распределения [1, 2]. Она определяет, очевидно, вероятность того, что наша случайная величина окажется меньше, чем данное значение v, т. е. равна вероятности неравенства $B(\varepsilon < v)$.

С возрастанием v вероятность этого неравенства будет увеличиваться и, следовательно, $F(v)$ есть функция неубывающая [2].

Из (7) следует, что отношение

$$\frac{t}{T} = \varphi(v) = 1 - F(v) \qquad (8)$$

означает вероятность противоположного события [т. е. вероятность неравенства $B(\varepsilon > v)$] и является, следовательно, интегральной функцией распределения вероятности противоположного события.

Функция $\varphi(v)$ в отличие от $F(v)$ будет убывающей функцией. Будем называть ее убывающей интегральной функцией распределения. Имея в виду, что $dF(v) = f(v)\,dv$, можем написать момент k-того порядка в форме интеграла Стилтьеса:

$$M_k = \int_a^b v^k\,dF(v).$$

Замечая далее, что $T\,dF(v) = -dt$ и что верхнему пределу соответствует некоторая величина t_1, а нижнему — величина t_2, причем $b > a$, $t_1 < t_2$, получим:

$$M_k = -\frac{1}{T}\int_{t_2}^{t_1} v^k\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} v^k\,dt. \tag{9}$$

Последний интеграл представляет собой площадь под некоторой кривой, получившейся в результате возведения абсцисс убывающей интегральной кривой распределения $\frac{t}{T} = t_* = \varphi(v)$ (т. е. ординат графика по продолжительности) в k-тую степень. В этом геометрический смысл момента k-того порядка.

Если случайная величина v, имеющая плотность вероятности $f(v)$, входит в качестве аргумента в некоторую функцию $P = \psi(v)$, то последняя, очевидно, будет являться также величиной случайной с какой-то плотностью $f_1(P)$. Связь между плотностями выражается равенством:

$$f(v)\,dv = f_1(P)\,dP. \tag{10}$$

Оно устанавливает тот факт, что соответствующие элементы площади под кривыми распределения будут одинаковы [3]. Из (10) будем иметь:

$$f_1(P) = \left.\frac{f(v)}{\frac{dP}{dv}}\right|_{v=\psi^{-1}(P)}. \tag{11}$$

На том же основании можно написать:

$$\int_0^v f(v)\,dv = \int_{P_0=\psi(0)}^{P=\psi(v)} f_1(P)\,dP \tag{12}$$

и, следовательно,

$$t = t(v) = T\left[1 - \int_0^v f(v)\,dv\right] = T\left[1 - \int_{P_0}^{P} f_1(P)\,dP\right] = t(P),$$

т. е.

$$t(v) = t(P).$$

Таким образом, графики по продолжительности двух функционально связанных случайных величин отличаются лишь по ординатам, абсциссы соответствующих точек их одинаковы. Каждому значению v будут соответствовать совершенно определенные значения P и t, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} P &= \psi(v); \\ t &= T\left[1 - \int_0^v f(v)\,dv\right] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

есть уравнение кривой по продолжительности в параметрической форме для случайной величины P (уравнение убывающей интегральной кривой распределения). Роль параметра выполняет величина v.

Учитывая, что

$$\int_0^{v_m} f(v)\,dv = \int_0^{v} f(v)\,dv + \int_v^{v_m} f(v)\,dv = 1,$$

где v_m — максимальное значение скорости ветра, зависимость $t(v)$ можно представить в виде:

$$t = T\int_v^{v_m} f(v)\,dv. \qquad (14)$$

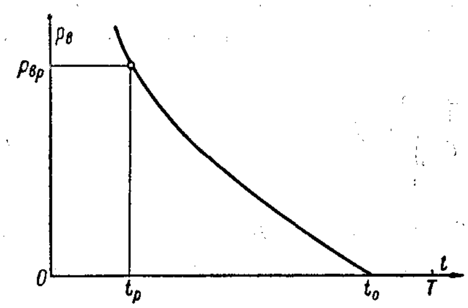

Рис. 2.

В соответствии с этим можно утверждать, что

$$\left.\begin{aligned} P_в &= c_0 D^2 v^3 \xi \ [квт]; \\ t &= T\int_v^{v_m} f(v)\,dv \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

есть уравнение кривой по продолжительности для мощности ветродвигателя в параметрической форме. При этом приняты следующие обозначения:

c_0 — постоянная, определяемая плотностью воздуха и выбранной системой единиц (обычно принимают $c_0 = 0{,}481 \cdot 10^{-3}$);

D — диаметр ветроколеса, *м*;

v — скорость ветра, *м/сек*;

ξ — коэффициент использования энергии ветра (в общем случае есть функция окружной скорости вращения ветроколеса и скорости ветра).

Работа, произведенная ветродвигателем в течение года, равна, очевидно, площади под кривой $P_в(t)$ (рис.2), заключенной между нулем и расчетной мощностью, т. е.

$$A = \int_0^{P_{вр}} t\,dP_в \ [квт \cdot ч]. \qquad (16)$$

Интегрируя по частям и переставляя пределы интегрирования, получим:

$$A = P_{вр} t_p + \int_{t_p}^{t_0} P_в\,dt \ [квт \cdot ч], \qquad (17)$$

где $P_{вр}$ — расчетная мощность ветродвигателя;

t_p — число часов работы установки с расчетной мощностью;

t_0 — общее число часов работы.

Годовая выработка может быть выражена через функции распределения плотности вероятности. Имея уравнение кривой по продолжительности для мощности ветродвигателя, легко получить момент любого порядка. Неполный момент k-того порядка, взятый в пределах от нуля до $P_{вр}$, как это следует из геометрического смысла момента, может быть определен по формуле

$$M_k = P_{вр}^k \frac{t_p}{T} + \frac{1}{T}\int_{t_p}^{t_0} P_в^k\,dt.$$

Интегрируя по частям, легко получим:

$$M_k = \frac{1}{T} \int_0^{P_{вр}} t \, d(P_в^k). \tag{18}$$

Таковы некоторые общетеоретические соотношения, которые должны быть положены в основу ветроэнергетических расчетов.

Функции распределения скорости ветра

Для проведения конкретных расчетов необходимо знать функцию распределения плотности вероятности (повторяемости) скорости ветра. Такая функция может быть определена обработкой статистических даннных по наблюдениям за скоростью ветра в каком-то пункте или группе пунктов. В советской ветроэнергетике широкое распространение получили в основном две различные функции распределения, полученные обработкой статистического материала целого ряда метеостанций. Одна из этих функций предложена М. М. Померцевым [6, 7] и представляет собой нормальный закон, другая—Гулленом в виде:

$$f(v)_г = k_1 e^{-3av} \sin(av). \tag{19}$$

Для одних районов нашей страны подтверждается один закон, для других—другой [6, 7]. Имеющиеся в литературе рекомендации на этот счет, видимо, недостаточно обоснованы. Плотность по М. М. Померцеву подчиняется нормальному закону, играющему огромную роль в теории вероятностей:

$$f(v)_н = k_2 e^{-\frac{(v-b)^2}{2\sigma^2}}. \tag{20}$$

Коэффициенты k_1 и k_2 находятся из условия, чтобы площадь под кривой, охватывающая все возможные значения случайной величины, была равна единице. В случае нормального закона площадь должна вычисляться в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, тогда

$$k_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \tag{21}$$

Величина b в формуле (20), именуемая центром распределения, равна наивероятнейшему значению скорости ветра. Если выбрать k_2 в соответствии с (21), т. е. учесть отрицательную область, то $b = v_{ср}$. В действительности скорость ветра не может принимать отрицательных значений, поэтому b несколько отличается от $v_{ср}$, однако это различие невелико вследствие незначительного влияния отрицательной области. Влияние это быстро уменьшается с увеличением $v_{ср}$ [7]. Величина σ называется среднеквадратичным уклонением и подсчитывается по формуле

$$\sigma = \sqrt{v^2_{ср.кв} - v^2_{ср}}. \tag{22}$$

Квадрат среднеквадратичного уклонения называется дисперсией, т. е.

$$D(v) = \sigma^2. \tag{23}$$

Таким образом, нормальный закон определяется двумя параметрами: $v_{ср}$ и σ. Однако в нашем случае, как показывают подсчеты, среднеквадратичное уклонение σ является функцией среднегодовой скорости $v_{ср}$. График этой зависимости приведен на чертеже (рис. 3).

Выше мы полагали, что скорость ветра может принимать бесконечно большие значения. В действительности, максимально возможное значение скорости ветра есть величина конечная, поэтому, полагая, что $f(\infty)=0$, в то время как плотность обращается в нуль при конечном значении v, мы тем самым допускаем некоторую ошибку. Нетрудно, однако, убедиться, что эта ошибка во всех практических случаях будет весьма малой величиной.

Плотность по Гуллену обращается в нуль при скорости ветра, равной нулю, и при $av=\pi$ (вообще при $av=n\pi$, где $n=0, 1, 2,\ldots$). При $av>\pi$ $f(v)_г<0$, что не имеет смысла, так как плотность вероятности есть величина существенно положительная. Это происходит потому, что кривая Гуллена так же, как и кривые Пирсона [3], не имеют другого оправдания, кроме того, что эти кривые хорошо отражают ту или иную статистическую закономерность [2, 3]. Если положить $av_m=\pi$, то

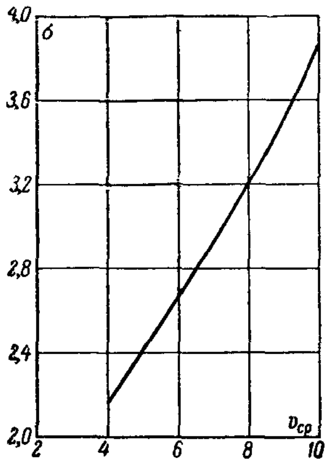

Рис. 3.

$$a=\frac{\pi}{v_m}.$$

При $av>\pi$

$$[f(v)_г]<k_1\cdot 0{,}000083.$$

Ясно, что такой величиной можно пренебречь, т. е. считать

$$f(v)_г|_{av>\pi}=0,$$

что равносильно допущению $v_m=\infty$.

Теперь параметр a может быть найден из условия

$$k_1\int_0^\infty v\exp(-3av)\sin(av)\,dv=v_{ср},$$

а коэффициент k_1 из условия

$$k_1\int_0^\infty \exp(-3av)\sin(av)\,dv=1.$$

Это дает

$$a^2=\frac{3k_1}{50v_{ср}}$$

и

$$k_1=10\,a.$$

Решая совместно, получим:

$$a=\frac{3}{5v_{ср}} \tag{24}$$

и

$$k_1=10a=\frac{6}{v_{ср}}. \tag{25}$$

Полученные значения a и k_1 практически совпадают с данными Емцова, найденные им несколько иным путем [6].

Найдем теперь уравнения кривых по продолжительности для наших двух распределений. Для распределения Гуллена это не вызывает затруднений.

$$F(v)_г=k_1\int^v \exp(-3av)\sin(av)\,dv=\{1-\exp(-3av)\,[3\sin(av)+\cos(av)]\}.$$

Подставляя в (7), получим:

$$t = T \exp(-3av)[3\sin(av) + \cos(av)]. \tag{26}$$

Для различных среднегодовых скоростей получим семейство кривых

$$t_* = \frac{t}{T} = t_*(v);$$

удобнее, однако, в качестве аргумента рассматривать величину av, тогда вместо семейства получим одну кривую, изображенную на рис. 4.

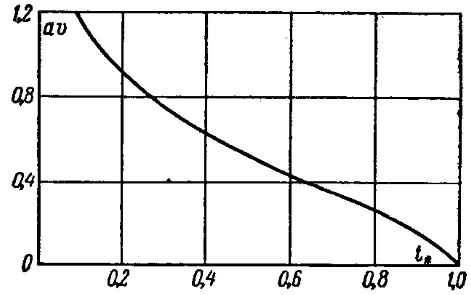

Рис. 4.

Интегральное распределение $F(v)$ в случае нормального закона имеет вид:

$$F(v)_н = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{v} \exp\left[-\frac{(v - v_{cp})^2}{2\sigma^2}\right] dv. \tag{27}$$

Этот интеграл в силу своей трансцендентности не может быть взят в элементарных функциях. Подстановкой $y = \frac{v - v_{cp}}{\sigma}$ можем привести его к виду:

$$F\left(\frac{v - v_{cp}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(v-v_{cp}):\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(v-v_{cp}):\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Далее, имея в виду, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2},$$

получим:

$$F\left(\frac{v - v_{cp}}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(v-v_{cp}):\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right]. \tag{28}$$

Это равенство справедливо при $\frac{v - v_{cp}}{\sigma} > 0$ $(v > v_{cp})$. В случае, когда $v < v_{cp}$, будем иметь [2]:

$$F(-y) = 1 - F(y).$$

Интеграл

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(v-v_{cp}):\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{v - v_{cp}}{\sigma}\right)$$

называется интегралом вероятности, подстановкой $s = \frac{y}{\sqrt{2}}$ он сводится к функции Лапласа — Крампа [1, 4, 5]. Для интеграла вероятности существуют подробные таблицы, при помощи которых $F\left(\frac{v - v_{cp}}{\sigma}\right)$ может быть построена. Уравнение кривых по продолжительности получает вид:

$$\left.\begin{aligned} t_* &= \frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{v-v_{cp}}{\sigma}\right)\right] \text{ при } v > v_{cp}; \\ t_* &= \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{v-v_{cp}}{\sigma}\right)\right] \text{ при } 0 < v < v_{cp}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

При $v = v_{cp}$ $\Phi(0) = 0$ и $t_* = \frac{1}{2}$.

На рис. 5 по уравнениям (29) построено семейство кривых по продолжительности при различных среднегодовых скоростях ветра (нижняя кривая пля $v_{cp} = 5$ *м/сек*, верхняя для $v_{cp} = 10$ *м/сек*).

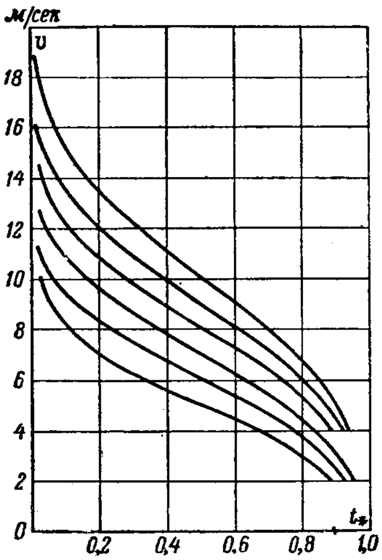

Рис. 5.

Сравнивая между собой кривые по продолжительности для теоретических распределений, можно видеть, что для кривой Гуллена характерно отсутствие периода безветрия и увеличение продолжительности в области высоких скоростей по сравнению с нормальным распределением. Имея эти кривые, легко получить графики по продолжительности для мощности ветродвигателя или ветроэлектростанции. Последние исчерпывающим образом характеризуют годовую выработку ВЭС и условия ее работы. Полученные соотношения и формулы позволяют решать разнообразные вопросы использования энергии ветра. К сожалению, за недостатком места автор лишен возможности проиллюстрировать применение полученных формул и зависимостей к решению конкретных задач ветроэнергетики, прежде всего таких, как определение годовой выработки ВЭС в наивыгоднейшем аэродинамическом режиме, и других величин, характеризующих условия работы ВЭС.

Выводы

1. Существующая методика ветроэнергетических расчетов теоретически весьма несовершенна, а практически неудобна в силу своей трудоемкости.

2. Ветер как энергоноситель подчиняется закономерностям случайных величин и, следовательно, теория вероятностей, изучающая эти закономерности, должна служить теоретической основой ветроэнергетических расчетов.

3. Повторяемость ветра есть не что иное, как средняя в интервале $\Delta v = 1$ плотность вероятности, численно равная вероятности неравенства $B(v < \varepsilon < v+1)$.

4. Целесообразно исходить из убывающей интегральной функции распределения, используемой в энергетике под названием графика по продолжительности. Это создает наглядность в использовании методов теории вероятностей.

5. Функция распределения мощности ветродвигателя как случайной величины легко может быть выражена через функцию распределения скорости ветра, при этом особенно просто получить уравнение кривой по продолжительности.

6. Общее выражение для определения годовой выработки может быть получено на основе кривой по продолжительности.

7. График по продолжительности мощности ветродвигателя или ветроэлектростанции (ВЭС) исчерпывающим образом характеризует эффективность и условия работы ветросиловой установки, поэтому он должен быть положен в основу при решении различных вопросов использования энергии ветра.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Гостехиздат, М., 1954.
2. Боев Г. П. Теория вероятностей, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
3. Торнтон Фрай, Теория вероятностей для инженеров, перевод с английского, под редакцией А. Я. Хинчина, ОНТИ, М.—Л., 1934.
4. Поссе К., Курс интегрального исчисления, ГОНТИ, 1938.
5. Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
6. Фатеев Е. М., Ветродвигатели и ветроустановки, ОГИЗ, Сельхозгиз, М., 1948.
7. Розентул С., Конструктивные параметры и технические эксплуатационные показатели ветроустановок, диссертация, М., 1940.