

## АНАЛИЗ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

И. А. ГОНЧАР, О. С. ВАДУТОВ

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

В последнее время возникла необходимость новых решений в области источников питания. Перспективным является применение в стабилизаторах напряжения регулирующих элементов, работающих в ключевом режиме. Такой режим работы регулирующего элемента позволяет получить сравнительно высокий к. п. д. источника, так как потери на регулирующем элементе в ключевом режиме незначительны.

Блок-схема импульсного стабилизатора напряжения изображена на рис. 1.

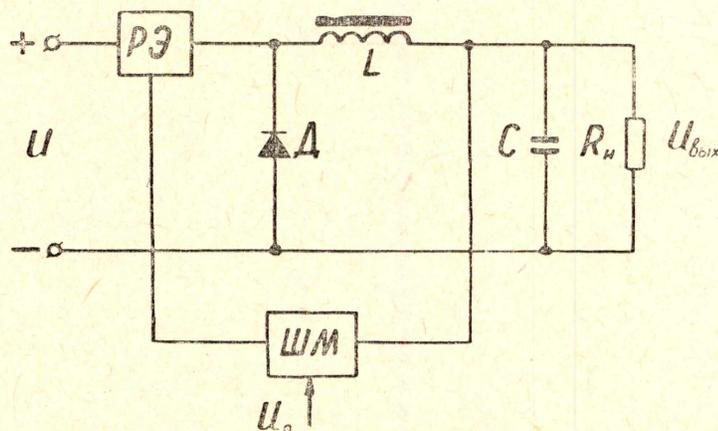


Рис. 1.

Регулирующий элемент, периодически замыкаясь с периодом, равным  $T$ , пропускает ток в течение времени  $t_n$ , а затем размыкается.

Прямоугольные импульсы после РЭ сглаживаются обычным фильтром, состоящим из емкости  $C$  и индуктивности  $L$ . Диод  $D$  служит для создания контура, по которому замыкается ток индуктивности после размыкания регулирующего элемента.

Прямоугольные импульсы управления на РЭ поступают от широтно-импульсного модулятора ШМ, длительность импульсов зависит от разности опорного и выходного напряжений. Регулирование выходного напряжения достигается изменением соотношения  $t_n/T$ .

Таким образом, импульсный стабилизатор напряжения по существу является системой автоматического регулирования с широтно-импульсной модуляцией. Такая система включает в себя импульсный

элемент ИЭ, непрерывную часть НЧ и элемент рассогласования. Блок-схема широтно-импульсной системы ШИС изображена на рис. 2.

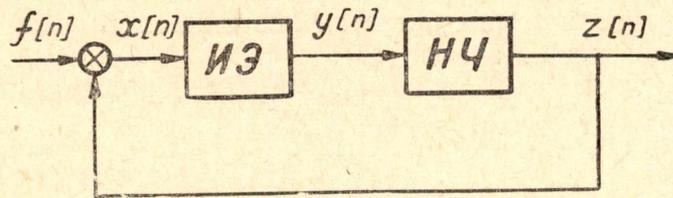


Рис. 2.

Уравнение импульсного элемента с широтно-импульсной модуляцией имеет вид

$$y[\bar{t}] = \begin{cases} k_n & n < \bar{t} < n + \gamma[n]. \\ 0 & n + \gamma[n] < \bar{t} < n + 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $k_n$  — высота импульсов, а  $\gamma[n]$  — относительная длительность импульсов. Зависимость  $\gamma[n]$  от входной величины  $x[n]$  изображена на рис. 3, аналитически эта зависимость запишется

$$\gamma[n] = \begin{cases} x \cdot x[n] & \text{при } 0 < x[n] < \frac{1}{x}, \\ 1 & \text{при } x[n] > \frac{1}{x}, \\ 0 & \text{при } x[n] < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Импульсные системы с ШИМ являются нелинейными системами, так как для них несправедлив принцип суперпозиции и, кроме того, выходная характеристика импульсного элемента имеет насыщение. Поэтому исследование этого класса систем в общем виде связано с определенными трудностями.

Динамика широтно-импульсных систем (ШИС) рассматривалась рядом авторов в линейном приближении, т. е. при небольшой модуляции. В работе [1] изложены графический и табличный способы построения переходных процессов при любой глубине модуляции, которые, однако, не дают возможности судить об устойчивости этих систем, а также исследовать автоколебательные режимы [2].

Поповым В. М. предложены новые методы исследования абсолютной устойчивости непрерывных нелинейных автоматических систем [3], которые отличаются от второго метода Ляпунова.

Аналогичные методы для нелинейных импульсных автоматических систем были разработаны Цыпкиным Я. З. [4, 5], которые использованы в данной работе при анализе устойчивости ШИС второго порядка.

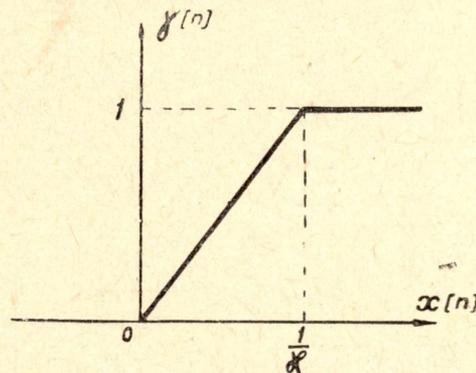


Рис. 3.

## Уравнение замкнутой широтно-импульсной системы

На непрерывную часть ШИС действует последовательность импульсов, амплитуда которых остается постоянной и равной  $k_n$ , а длительность изменяется по закону (2).

Реакция непрерывной части на импульс длительности  $\gamma [m]$ , приложенный в момент  $\bar{t} = m$ , равна

$$\begin{cases} k_n h(\bar{t} - m) & m \leq \bar{t} \leq m + \gamma [m], \\ k_n [h(\bar{t} - m) - h(\bar{t} - m - \gamma [m])] & m + \gamma [m] \leq \bar{t}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $h(\bar{t})$  — реакция непрерывной части на единичный скачок, которая определяется по известной формуле разложения [6].

Выходная величина  $z(\bar{t})$  широтно-импульсной системы равна сумме реакций непрерывной части на каждый импульс

$$z(\bar{t}) = k_n \sum_{m=0}^{n-1} h(\bar{t} - m) - h(\bar{t} - m - \gamma [m]) + k_n h(\bar{t} - n), \quad m \leq \bar{t} \leq m + \gamma [m], \quad (4)$$

$$z(\bar{t}) = k_n \sum_{m=0}^n h(\bar{t} - m) - h(\bar{t} - m - \gamma [m]), \quad m + \gamma [m] \leq \bar{t} \leq m + 1.$$

Заменяя в последнем выражении  $\bar{t} = n + \varepsilon$ , перейдем к решетчатым функциям

$$z[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^{n-1} k_n (h[n - m, \varepsilon] - h[n - m, \varepsilon - \gamma [m]]) + k_n h[0, \varepsilon], \quad 0 \leq \varepsilon \leq \gamma [m], \quad (5)$$

$$z[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n k_n (h[n - m, \varepsilon] - h[n - m, \varepsilon - \gamma [m]]), \quad \gamma [m] \leq \varepsilon \leq 1.$$

Принимая во внимание, что

$$k_n h(\bar{t}) = c_{00} + \sum_{\nu=1}^l c_{\nu 0} e^{q_\nu \bar{t}}, \quad (6)$$

где

$$c_{00} = \frac{k_n P_n(0)}{Q_n(0)}; \quad c_{\nu 0} = \frac{k_n P_n(q_\nu)}{Q_n'(q_\nu) q_\nu},$$

получаем уравнение рассматриваемой ШИС относительно оригиналов.

$$z[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^l c_{\nu 0} (1 - e^{-q_\nu \gamma [m]}) e^{q_\nu (n-m)} e^{q_\nu \varepsilon} + c_{00} + \sum_{\nu=1}^l c_{\nu 0} e^{q_\nu \varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \gamma [m], \quad (7)$$

$$z[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n \sum_{\nu=1}^l c_{\nu 0} (1 - e^{-q_\nu \gamma [m]}) e^{q_\nu (n-m)}, \quad \gamma [m] \leq \varepsilon \leq 1.$$

Переходя к изображениям с использованием теоремы свертки, найдем для разомкнутой ШИС

$$Z^*(q, \varepsilon) = \sum_{v=1}^l c_{v0} \frac{e^{q_v}}{e^q - e^{q_v}} D \{1 - e^{-q_v \tau [n]}\} e^{q_v \varepsilon} + D \{k_n h [0, \varepsilon]\},$$

$$0 \leq \varepsilon \leq \tau [n], \quad (8)$$

$$Z^*(q, \varepsilon) = \sum_{v=1}^l c_{v0} \frac{e^q}{e^q - e^{q_v}} D \{1 - e^{-q_v \tau [n]}\} e^{q_v \varepsilon},$$

$$\tau [n] \leq \varepsilon \leq 1.$$

При  $\varepsilon = 0$   $h [0, \varepsilon] = 0$ , тогда

$$Z^*(q, 0) = Z^*(q) = \sum_{v=1}^l c_{v0} \frac{e^{q_v}}{e^q - e^{q_v}} D \{1 - e^{-q_v \tau [n]}\}. \quad (9)$$

Изображения определяются по их оригиналам при помощи дискретного преобразования Лапласа, или  $D$ -преобразования

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f [n] = D \{f [n]\}, \quad (10)$$

где  $q$  — параметр преобразования.

Уравнение (9) позволяет представить разомкнутую широтно-импульсную систему в виде  $l$  параллельно соединенных ветвей, каждая из которых в свою очередь состоит из последовательно соединенных линейной импульсной части ЛИЧ и не линейного элемента НЭ. При этом передаточная функция ЛИЧ будет

$$W_v^*(q) = c_{v0} \frac{e^{q_v}}{e^q - e^{q_v}}, \quad (v = 1, 2, \dots, l), \quad (11)$$

а характеристика нелинейного элемента

$$\Phi_v(x [n]) = 1 - e^{-q_v \tau [n]}. \quad (12)$$

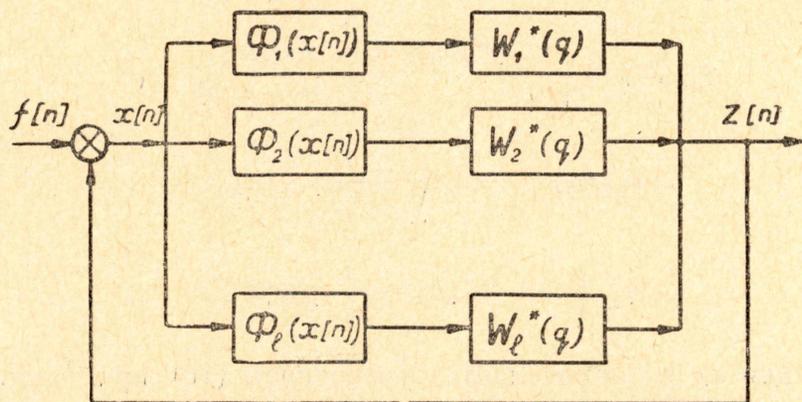


Рис. 4.

Уравнение замкнутой ШИС (рис. 4) относительно изображений запишется в виде

$$X^*(q) = F^*(q) - \sum_{v=1}^l W_v^*(q) D \{\Phi_v(x [n])\}, \quad (13)$$

соответственно относительно оригиналов

$$x[n] = f[n] - \sum_{m=0}^n \sum_{v=1}^l \omega_v[m] \Phi_v(x[n-m]), \quad (14)$$

где

$$W_v^*(q) = D\{\omega_v[n]\}.$$

### Абсолютная устойчивость ШИС второго порядка

Рассмотрим широтно-импульсную систему, непрерывная часть которой описывается дифференциальным уравнением второго порядка (рис. 1).

Вопросы устойчивости нелинейной импульсной автоматической системы разработаны Я. З. Цыпкиным [4, 5] для случая, когда НИАС состоит из одного нелинейного элемента и одной линейной импульсной части. Покажем, что полученные в этих работах критерии абсолютной устойчивости положения равновесия распространяются и на ШИС второго порядка. Для этого случая уравнения (13) и (14) примут вид

$$X^*(q) = F^*(q) - W_1^*(q) \cdot D\{\Phi_1(x[n])\} - W_2^*(q) \cdot D\{\Phi_2(x[n])\}, \quad (15)$$

$$x[n] = f[n] - \sum_{m=0}^n \omega_1[m] \Phi_1(x[n-m]) - \sum_{m=0}^n \omega_2[m] \Phi_2(x[n-m]). \quad (16)$$

Рассуждения будем вести аналогично изложенным в [4]. Введем вспомогательные функции

$$\varphi_{1N}[n] = \begin{cases} \Phi_1(x[n]) & 0 \leq n \leq N, \\ 0 & n < 0, n > N; \end{cases} \quad (17)$$

$$\varphi_{2N}[n] = \begin{cases} \Phi_2(x[n]) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & n < 0, n > N \end{cases}$$

и

$$\psi_{1N}[n] = x_N[n] - \frac{1}{k_1} \varphi_{1N}[n], \quad (18)$$

$$\psi_{2N}[n] = x_N[n] - \frac{1}{k_2} \varphi_{2N}[n].$$

Функция  $x_N[n]$  определяется уравнением (16) при замене в нем  $\Phi_1(x[n])$  и  $\Phi_2(x[n])$  на  $\varphi_{1N}[n]$  и  $\varphi_{2N}[n]$ , т. е.

$$x[n] = f[n] - \sum_{m=0}^n \omega_1[m] \varphi_{1N}[n-m] - \sum_{m=0}^n \omega_2[m] \varphi_{2N}[n-m]. \quad (19)$$

Составим выражение

$$\rho_N = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1N}[n] \psi_{1N}[n] + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2N}[n] \psi_{2N}[n]. \quad (20)$$

Подставляя в него значения  $\varphi_{1N}$ ,  $\varphi_{2N}$ ,  $\psi_{1N}$ ,  $\psi_{2N}$ , получим

$$\begin{aligned} \rho_N = & \sum_{n=0}^N \Phi_1(x[n]) \left[ x[n] - \frac{\Phi_1(x[n])}{k_1} \right] + \\ & + \sum_{n=0}^N \Phi_2(x[n]) \left[ x[n] - \frac{\Phi_2(x[n])}{k_2} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Если характеристики нелинейных элементов  $\Phi_1(x[n])$  и  $\Phi_2(x[n])$  принадлежат соответственно секторам  $(0, k_1)$  и  $(0, k_2)$ , т. е.

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\Phi_1(x[n])}{x[n]} < k_1, \\ 0 < \frac{\Phi_2(x[n])}{x[n]} < k_2, \end{aligned} \quad (22)$$

то положение равновесия ШИС второго порядка будет абсолютно устойчивым при условии

$$\rho_N < c, \quad (c > 0). \quad (23)$$

Найдем условия выполнения неравенства (23), для чего воспользуемся формулой Ляпунова—Парсеваля [3]

$$\begin{aligned} \rho_N = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{1N}^*(-j\bar{\omega}) \Psi_{1N}^*(j\bar{\omega}) d\bar{\omega} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{2N}^*(-j\bar{\omega}) \Psi_{2N}^*(j\bar{\omega}) d\bar{\omega}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})$ ,  $\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})$ ,  $\Psi_{1N}^*(j\bar{\omega})$  и  $\Psi_{2N}^*(j\bar{\omega})$  — спектральные функции.

$$\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega}) = D \{ \varphi_{1N}[n] \}_{q=j\bar{\omega}} = \sum_{n=0}^N e^{-j\bar{\omega}n} \Phi_1(x[n]), \quad (25)$$

$$\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega}) = D \{ \varphi_{2N}[n] \}_{q=j\bar{\omega}} = \sum_{n=0}^N e^{-j\bar{\omega}n} \Phi_2(x[n]),$$

$$\Psi_{1N}^*(j\bar{\omega}) = D \{ x_N[n] \}_{q=j\bar{\omega}} - \frac{1}{k_1} D \{ \varphi_{1N}[n] \}_{q=j\bar{\omega}}, \quad (26)$$

$$\Psi_{2N}^*(j\bar{\omega}) = D \{ x_N[n] \}_{q=j\bar{\omega}} - \frac{1}{k_2} D \{ \varphi_{2N}[n] \}_{q=j\bar{\omega}}.$$

Обозначим

$$D \{x_N [n]\}_{q=j\bar{\omega}} = X_N^* (j\bar{\omega}). \quad (27)$$

Тогда уравнения (26) при условии (27) примут вид

$$\Psi_{1N}^* (j\bar{\omega}) = X_N^* (j\bar{\omega}) - \frac{1}{k_1} \Phi_{1N}^* (j\bar{\omega}), \quad (28)$$

$$\Psi_{2N}^* (j\bar{\omega}) = X_N^* (j\bar{\omega}) - \frac{1}{k_2} \Phi_{2N}^* (j\bar{\omega}).$$

Определим  $X_N^* (j\bar{\omega})$ , подвергнув (18)  $D$ -преобразованию при  $q = j\bar{\omega}$ ,

$$X_N^* (j\bar{\omega}) = F^* (j\bar{\omega}) - W_1^* (j\bar{\omega}) \Phi_{1N}^* (j\bar{\omega}) - W_2^* (j\bar{\omega}) \Phi_{2N}^* (j\bar{\omega}). \quad (29)$$

Из уравнения (24) при условии (28) и (29) получим

$$\begin{aligned} \rho_N = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \Phi_{1N}^* (j\bar{\omega}) \cdot F^* (j\bar{\omega}) - \Pi_1^* (j\bar{\omega}) \cdot |\Phi_{1N}^* (j\bar{\omega})|^2 - \\ & - W_2^* (j\bar{\omega}) \Phi_{1N}^* (-j\bar{\omega}) \Phi_{2N}^* (j\bar{\omega}) \} d\bar{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \Phi_{2N}^* (j\bar{\omega}) \cdot F^* (j\bar{\omega}) - \\ & - \Pi_2^* (j\bar{\omega}) |\Phi_{2N}^* (j\bar{\omega})|^2 - W_1^* (j\bar{\omega}) \Phi_{1N}^* (j\bar{\omega}) \Phi_{2N}^* (-j\bar{\omega}) \} d\bar{\omega}. \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\Pi_1^* (j\bar{\omega}) = W_1^* (j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_1}, \quad (31)$$

$$\Pi_2^* (j\bar{\omega}) = W_2^* (j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_2}.$$

Поскольку интеграл от мнимой части выражения (30) равен нулю, то имеет смысл оставить в подинтегральном выражении только вещественные части.

В [5] доказано, что первые два слагаемые в обоих интегралах ограничены при условии

$$Re \Pi_1^* (j\bar{\omega}) > 0, \quad (32)$$

$$Re \Pi_2^* (j\bar{\omega}) > 0.$$

Поэтому рассмотрим лишь последние слагаемые, которые обозначим

$$\begin{aligned} S = & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re \Phi_{1N}^* (j\bar{\omega}) \Phi_{2N}^* (j\bar{\omega}) W_2^* (j\bar{\omega}) d\bar{\omega} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re \Phi_{1N}^* (j\bar{\omega}) \Phi_{2N}^* (j\bar{\omega}) W_1^* (j\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (33) \end{aligned}$$

Для частного случая, когда непрерывная часть представляет собой колебательный контур, корни характеристического уравнения кото-

рого комплексно сопряжены, будут комплексно сопряженными и функции  $\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})$  и  $\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})$ . Тогда можно записать

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})|^2 \operatorname{Re} W_2^*(j\bar{\omega}) d\bar{\omega} - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})|^2 \operatorname{Re} W_1^*(j\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (34)$$

При условии (32) величины  $\operatorname{Re} W_1^*(j\bar{\omega})$  и  $\operatorname{Re} W_2^*(j\bar{\omega})$  ограничены, поэтому

$$\rho_N < c \quad (c > 0). \quad (35)$$

Таким образом, широтно-импульсная система второго порядка будет абсолютно устойчива, если характеристики нелинейных элементов  $\Phi_1(x[n])$  и  $\Phi_2(x[n])$  принадлежат соответственно секторам  $(0, k_1)$  и  $(0, k_2)$ , и

$$\operatorname{Re} \Pi_1^*(j\bar{\omega}) = \operatorname{Re} W_1^*(j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_1} > 0, \\ \operatorname{Re} \Pi_2^*(j\bar{\omega}) + \operatorname{Re} W_2^*(j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_2} > 0. \quad (36)$$

Этот критерий устойчивости является лишь достаточным и, кроме того, он справедлив для широтно-импульсных систем, непрерывная часть которых описывается уравнением второго порядка и имеет комплексно-сопряженные корни.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Расчет процессов в нелинейных системах прерывистого регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. XVII, № 6, 1956.
2. И. В. Пышкин. Автоколебания в системах с широтно-импульсной модуляцией. Сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем». Изд-во АН СССР, М, 1960.
3. В. М. Попов. От абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. XXII, № 8, 1961.
4. Я. З. Цыпкин. Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем. Доклады АН СССР, т. 145, № 1, 1962.
5. Я. З. Цыпкин. Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах. «Автоматика и телемеханика», т. XXIV, № 12, 1963.
6. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М, 1963.