ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 167 1967

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАЛЕГАНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ПО НЕОРИЕНТИРОВАННЫМ КЕРНАМ НА СЕТКЕ ВУЛЬФА

В. В. НИКОЛАЕВ

(Представлена научным семинаром кафедр геологии и разведки месторождений полезных ископаемых, петрографии и минералогии)

Слабая обоснованность и нередко низкая точность структурных построений по материалам разведочного бурения в значительной мере обусловлены тем, что геологическая документация скважин осуществляется преимущественно по неориентированному керну, исключающему возможность непосредственного измерения элементов залегания напластования. Оценим возможность решения этой задачи по неориентированным кернам, отобранным в различно ориентированных интервалах одной или нескольких скважин, для случая однообразного залегания слоистой толщи.

Исходными данными для решения задачи являются ориентировка осей скважин в точках отбора кернов и видимые углы падения слоев в кернах (углы между плоскостью напластования и плоскостью, перпендикулярной к оси керна). Используя формулу для определения угла между плоскостями [1, стр. 212], запишем следующий ряд уравнений:

$$
\begin{aligned}
\pm \cos\omega_1 &= \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1,\\
\pm \cos\omega_2 &= \cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)\\
\pm \cos\omega_n &= \cos\alpha\cos\alpha_n + \cos\beta\cos\beta_n + \cos\gamma\cos\gamma_n,
\end{aligned}
$$

где α, β, γ — углы, образованные нормалью к напластованию, а α_i, β_i, γ_i — осями скважин с положительными направлениями координатных осей ω_i — видимые углы падения слоев в кернах соответствующих скважин. Легко заметить, что эти уравнения являются нормальными уравнениями плоскостей, перпендикулярных к осям скважин в точках отбора кернов, с полярными углами α_i, β_i, γ_i и полярными расстояниями $\pm\cos\omega_i$.

Рассматривая уравнения (1) как элементы некоторого ряда, найдем все сочетания их, взятые по n. Получим C_{2n}^{n} систем уравнений с тремя неизвестными: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, определяющими ориентировку искомого вектора (нормали к напластованию), для которого с очевидной необходимостью должно удовлетворяться условие

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2)$$

(уравнение сферы единичного радиуса). Решения составленных систем уравнений, удовлетворяющие условию (2), будут ответом на поставленную задачу.

Исследование задачи, не уменьшая общности, ограничим случаями решения ее по трем и двум неориентированным кернам. Располагая данными по трем скважинам (кернам), можно составить шесть уравнений плоскостей, из которых можно образовать 20 систем по три уравнения в каждой. Замечаем, что в некоторых системах (их 12) два из трех уравнений содержат одинаковые коэффициенты при неизвестных. Очевидно, эти системы не могут иметь решения (две параллельные плоскости пересекаются третьей) и должны быть исключены из дальнейшего рассмотрения.

Прервем на время исследование решений восьми оставшихся систем уравнений, соответствующих общему решению задачи, и исследуем возможные решения одной из этих систем, например:

$$\begin{cases} \cos\omega_1 = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1, \\ \cos\omega_2 = \cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2, \\ \cos\omega_3 = \cos\alpha\cos\alpha_3 + \cos\beta\cos\beta_3 + \cos\gamma\cos\gamma_3, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{cases} \tag{3}$$

На базе исследования системы трех уравнений с тремя неизвестными [1, стр. 144] приходим к выводу, что решение систмеы (3) исчерпывается двумя случаями.

1. Три плоскости имеют одну общую точку, лежащую на сфере.

Это возможно, если определитель системы уравнений трех плоскостей отличен от нуля, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta^1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Неравенство $\Delta \neq O$ означает, что нормальные векторы плоскостей некомпланарны. Координаты общей точки трех плоскостей (они, разумеется, удовлетворяют и уравнению сферы, так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + + \cos^2\gamma = 1$) определим по формулам

$$\cos\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \cos\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \cos\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cos\omega_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\omega_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\omega_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\omega_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\omega_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\omega_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\omega_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\omega_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\omega_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Прямоугольные и сферические координаты связаны соотношениями

$$\cos\alpha = \sin\vartheta\cos\lambda, \ \cos\beta = \sin\vartheta\sin\lambda, \ \cos\gamma = \cos\vartheta,$$

где ϑ — угол падения, а λ — азимут падения пород. Отсюда,

$$\vartheta = \gamma, \qquad \sin\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\vartheta}.$$

2. Три плоскости пересекаются по одной прямой, имеющей одну или две общие точки со сферой.

Такие случаи возможны, если все определители третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & \cos\omega_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \cos\omega_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & \cos\omega_3 \end{pmatrix}$$

равны нулю, но, по крайней мере, один из миноров определителя (4) отличен от нуля.

Поскольку две из трех плоскостей, пересекающихся по одной прямой, определяют пространственное положение последней, то система (3) в данном случае может быть представлена системой уравнений сферы и двух плоскостей. Выразив $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ из уравнений плоскостей и подставив их значения в уравнение сферы, получим квадратное уравнение с одним неизвестным $\cos\gamma$. Если при решении этого уравнения дискриминант окажется больше нуля, то уравнение будет иметь два различных действительных корня, если дискриминант окажется равным нулю, то уравнение будет иметь один действительный корень. Случаи, когда дискриминант меньше нуля, исключены, так как прямоугольные координаты точек выражаются действительными числами. Таким образом, система (3) может иметь двузначное или единственное решение.

Решение системы уравнений сферы и двух плоскостей в общем виде мы не приводим ввиду очевидной простоты и громоздкости вычислений. Отметим только, что задача в рассматриваемом случае имеет единственное решение, если оси скважин и нормаль к напластованию компланарны (рис. 1), и двузначное — если последние некомпланарны, а оси скважин компланарны.

Случай, когда три плоскости не имеют общей точки (уравнения несовместны), был бы возможен при условии: если определитель (4) равен нулю и, по крайней мере, один из его миноров отличен от нуля, если при этом один из определителей третьего порядка (5) был бы отличен от нуля. Последнее исключено: если определитель (4) равен нулю, а $\cos\omega_i = \cos\alpha\cos\alpha_i + \cos\beta\cos\beta_i + \cos\gamma\cos\gamma_i$, то все определители третьего порядка (5) равны нулю. Случай, когда три плоскости совпадают или параллельны (определитель и все его миноры равны нулю), также невозможен, так как по условию задачи керны отобраны из различно ориентированных интервалов скважин.

Продолжим исследование общего решения задачи. Сопоставляя решения восьми оставшихся систем уравнений, замечаем, что решения соответствующих пар систем отличаются лишь знаками. Так, если система (3) имеет, например,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\omega_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\omega_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\omega_3 \end{vmatrix},$$

то система

$$\begin{cases} -\cos\omega_1 = \cos\alpha' \cos\alpha_1 + \cos\beta' \cos\beta_1 + \cos\gamma' \cos\gamma_1, \\ -\cos\omega_2 = \cos\alpha' \cos\alpha_2 + \cos\beta' \cos\beta_2 + \cos\gamma' \cos\gamma_2, \\ -\cos\omega_3 = \cos\alpha' \cos\alpha_3 + \cos\beta' \cos\beta_3 + \cos\gamma' \cos\gamma_3, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1 \end{cases}$$

имеет

$$\Delta_3' = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & -\cos\omega_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & -\cos\omega_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & -\cos\omega_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\cos\gamma = -\cos\gamma$. Аналогично, $\cos\beta = -\cos\beta'$, $\cos\alpha = -\cos\alpha'$. Решения таких пар систем уравнений геометрически представляют противоположные векторы, однозначно определяющие ориентировку напластования. На этом основании заключаем, что задача при определенных соотношениях углов фигурирующих в уравнениях (3), может иметь одно-, двух-, трех- или четырехзначное решение.

Не повторяя всей логической цепи предыдущих рассуждений, определим возможное число решений задачи по двум кернам. В данном случае, очевидно, можно составить четыре уравнения плоскостей, перпендикулярных к осям скважин, а из них четыре пары уравнений. Каждая пара таких уравнений, взятая с уравнением (2), образует систему трех уравнений с тремя неизвестными. Решения двух из четырех систем будут отличаться от решений двух других лишь знаками. Каждая из этих двух систем, как было доказано (случай 2), может иметь одно- или двузначное решение. Следовательно, задача по определению элементов залегания пород по двум и трем кернам (вторая группа случаев) может иметь одно-, двух-, трех- или четырехзначное решение.

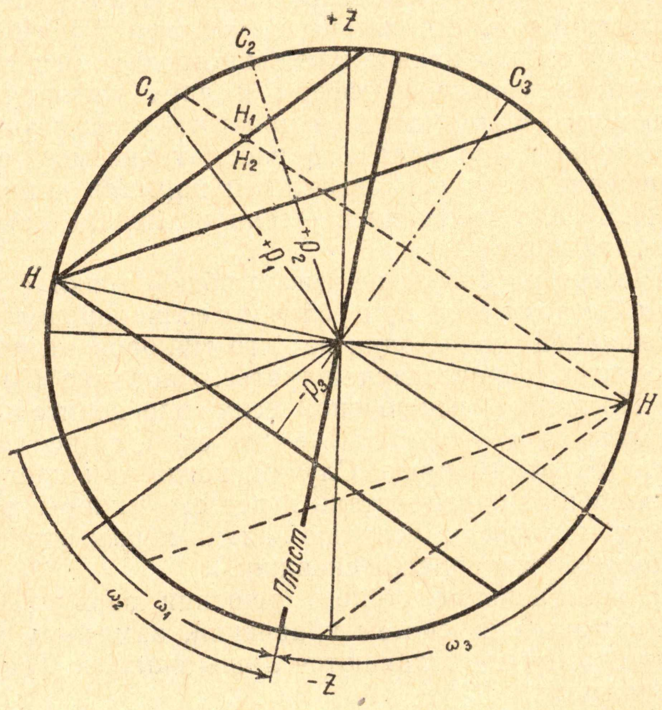

Рис. 1. Геометрическая форма связи между ориентировкой скважин, видимыми углами падения слоев в кернах и элементами залегания горных пород.

Оси скважин (кернов) как векторы приведены к общему началу (изображены штрих-пунктирными линиями); C_1, C_2, C_3 — точки пересечения их с верхней полусферой; ω_1, ω_2, ω_3 — острые видимые углы падения слоев в кернах соответствующих скважин; p_1, p_2, p_3 — полярные расстояния плоскостей, перпендикулярных к ссям скважин ($p_i = \pm\cos\omega_i$). Точка H—полюс напластования.

Многозначность решения задачи в ряде случаев может оказаться формальной частично или полностью. Формальная многозначность решения обусловлена тем, что в кернах измеряются всегда острые видимые углы падения слоев. Нам часто неизвестно, имеем ли мы дело с нормальным или опрокинутым залеганием пород и в какой последовательности каждая скважина пересекает слои (в направлении от кровли к почве или в обратном направлении). Если представится возможным получить ответы на эти вопросы, формальную многозначность решения задачи (но не многозначность вообще в общем случае) можно исключить.

Рассмотрим такой пример (рис. 1). Известно, что залегание пород нормальное и скважина C_1 пересекает слои в направлении от кровли к почве. Скважина C_3 пересекает слои в обратной последовательности, что можно установить по признакам нормального и опрокинутого залегания слоев в кернах или на основании сопоставления разрезов по скважинам. В кернах скважин C_1 и C_3 замерены острые видимые углы падения слоев, равные соответственно ω_1 и ω_3. На рис. 1 видно, что задача формально имеет трехзначное решение (точки H, H_1 и H_2 на сфере), а действительным решением ее является точка H, то есть решение системы

$$\begin{cases} +\cos\omega_1 = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1, \\ -\cos\omega_3 = \cos\alpha\cos\alpha_3 + \cos\beta\cos\beta_3 + \cos\gamma\cos\gamma_3, \\ \cos\alpha^2 + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{cases}$$

Очевидно, для исключения формальной многозначности решения задачи необходимо составить и решить такую систему, где в уравнениях плоскостей свободные члены были бы взяты с соответствующими знаками. Правило для определения этих знаков можно сформулировать так: плоскости, перпендикулярные к осям скважин, пересекающих слои в направлении от кровли к почве, должны иметь положительное полярное расстояние, а плоскости, перпендикулярные к осям скважин, пересекающих слои в обратной последовательности, — отрицательное полярное расстояние.

Решение системы (или систем) уравнений, составленной по конкретным исходным данным, может быть получено графическим путем. Геометрический смысл уравнений ясен из предыдущего изложения. Графическое решение этой системы сводится к нахождению полюса напластования горных пород как общей точки окружностей, являющихся линиями пересечения плоскостей с полярными углами α_i, β_i, γ_i и полярными расстояниями $\pm\cos\omega_i$ с верхней полусферой единичного радиуса. Необходимые построения и определение элементов залегания пород легко могут быть выполнены в стереографической проекции с помощью сетки Вульфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. Изд. 29, стереотипное. Изд. «Наука», М., 1964.