

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ. II

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

3. Оценка среднего квадрата величины V для случайной функции. Будем полагать, что интерполированию подвергаются реализации некоторого случайного однородного поля (соответственно стационарного процесса), для которого известна корреляционная функция $K(h)$. Именно с такими задачами и приходится иметь дело при дискретном измерении и контроле технологических параметров [1].

Для случайной функции $f(x)$ при фиксированных узлах x_k сумма

$$\sum_{k=0}^{2n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})|$$

от одной реализации к другой принимает случайные значения и, следовательно, является случайной величиной.

Построим оценку среднего квадрата этой величины для однородного поля $f(x)$. Согласно (2.8) имеем

$$M[V^2] = M \left[\left(\sum_{k=0}^{2n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) \right)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Воспользовавшись неравенством

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

(частный случай формулы Коши), преобразуем правую часть (3.1):

$$\begin{aligned} M \left[\left(\sum_{k=0}^{2n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) \right)^2 \right] &\leq 2nM \left[\sum_{k=0}^{2n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1}))^2 \right] = \\ &= 2n \sum_{k=0}^{2n-1} (M[f(x_k)^2] + M[f(x_{k+1})^2] - 2M[f(x_k) \cdot f(x_{k+1})]). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Слагаемые в последнем выражении представляют собой не что иное как значение корреляционной функции в соответствующих точках, т. е.

$$M[f(x_k) \cdot f(x_{k+1})] = K(x_k, x_{k+1}),$$

$$M[f(x_k)^2] = K(x_k, x_k),$$

$$M[f(x_{k+1})^2] = K(x_{k+1}, x_{k+1}).$$

В случае однородного случайного поля корреляционная функция не зависит от выбора точек x_k и x_{k+1} , она полностью определяется расстоянием между этими точками [2].

Следовательно (3.2), окончательно примет вид

$$M\left[\left(\sum_{k=0}^{2n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1}))\right)^2\right] \leq 8n^2 [K(0) - K(x_{k+1} - x_k)]. \quad (3.3)$$

Для равноотстоящих узлов

$$M[V^2] = \overline{V^2} \leq 8n^2 [K(0) - K(h)], \quad (3.4)$$

где

$$h = x_{k+1} - x_k = 2\pi / (2n + 1).$$

4. Определение числа узлов при заданной погрешности приближения ε_3 и погрешности измерения ε_0 .

Если предположить, что корреляционная функция $K(h)$ определяется экспериментально по отсчетам в точках поля x_k при погрешности измерительных приборов ε_0 , то расстояние между узлами целесообразно выбирать не меньше, чем h_0 , определяемое соотношением [3]:

$$K(0) - K(h_0) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}.$$

Действительно, дальнейшее уменьшение расстояния между отсчетами не дает увеличения точности определения корреляционной функции, а также любых других характеристик.

Исходя из этого, можно сделать следующий вывод: структурная характеристика $\overline{V^2}$ случайного поля $f(x)$, определяемая в данном случае через корреляционную функцию согласно (3.4), не может быть оценена точнее, чем $4n^2\varepsilon_0^2$, т. е.

$$\overline{V^2} = M\left[\left(\sum_{k=0}^{2n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1}))\right)^2\right] \leq 4n^2\varepsilon_0^2, \quad (4.2)$$

где n определяется из уравнения

$$K(0) - K\left(\frac{L}{2n+1}\right) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}. \quad (4.3)$$

Представляя (4.2) в (2.12 ч. 1), получим

$$\sigma_{n, n+1} = \varepsilon_0,$$

т. е. в предельном случае при интерполировании по приближенным отсчетам ряд (1. ч. 1) необходимо ограничить тем членом, для которого

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)} \leq \varepsilon_0. \quad (4.5)$$

Все остальные члены ряда, начиная с n -го, по абсолютной величине меньше и поэтому должны быть отброшены как недостоверные.

Таким образом, полученные результаты дают решение следующей задачи дискретного измерения: каким числом узлов необходимо ограничиться при интерполировании рельефа поля $f(l)$ тригонометрическим полиномом, если отсчеты известны со среднеквадратичной погрешностью σ_0 .

В технических приложениях эта задача может быть сформулирована так: каким числом датчиков разумно ограничиться при контроле рельефа пространственного параметрического поля, если погрешность датчиков и измерительных приборов не превышает σ_0 .

Теперь рассмотрим следующую задачу дискретного измерения: с какой среднеквадратичной погрешностью σ_m можно представить рельеф поля $f(l)$ по $(2m+1)$ дискретным отсчетам, если погрешность измерения значений поля σ_0 . При решении этой задачи учитываем, что предельная величина погрешности интерполирования σ_m равна σ_0 при $m = n$.

Из (2.11) имеем

$$\sigma_m^2 = \frac{\overline{V^2}}{4} \sum_{\kappa=m+1}^n \frac{1}{\kappa^2} = n^2 \sigma_0^2 \sum_{\kappa=m+1}^n \frac{1}{\kappa^2}. \quad (4.6)$$

Величина суммы в (4.6) может приближенно оценена с помощью формулы Эйлера:

$$\sum_{\kappa=m+1}^n \frac{1}{\kappa^2} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{60} \left(\frac{1}{(m+1)^3} - \frac{1}{n^3} \right) + \dots$$

Ограничиваясь двумя членами этого разложения, что вполне достаточно для практических расчетов, получим

$$\sigma_m = \sigma_0 \cdot n \sqrt{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{n^2} \right)}, \quad (4.7)$$

С помощью этого соотношения может быть решена и обратная задача, т. е. когда требуется определить необходимое число узлов интерполирования по заданной величине погрешности σ_3 , при этом заведомо известно, что $\sigma_3 > \sigma_0$. Необходимое число отсчетов $(2m+1)$ определится уравнением

$$\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{2}{m+1} - \frac{2\sigma_3^2 - \sigma_0^2}{n^2 \sigma_0^2} - \frac{2}{n} = 0. \quad (4.8)$$

В заключение рассмотрим структуру общей погрешности приближения по приближенным отсчетам. Общая погрешность складывается из неустраняемой и устраняемой погрешностей, т. е.

$$\sigma^2 = \sigma_3^2 + \sigma_n^2. \quad (4.9)$$

Выше было показано, что $\sigma_n = \sigma_0$ и в предельном случае $\sigma_y = \sigma_0$. В результате достижимая погрешность приближения

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \sqrt{2} \quad (4.10)$$

при интерполировании тригонометрическим полиномом по приближенным отсчетам.

Соотношения для расчета числа узлов получены в предположении, что реализации случайного поля образуют семейство функций ограниченной вариации и, вообще говоря, дают верхнюю грань возможных значений. Действительно, обычно кривые, описывающие распределение физических величин, как правило, гладки и непрерывны вместе с пер-

вой производной (градиентом поля), за исключением, может быть, на концах интервала. Но в этом случае, как известно, $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, т. е. интерполяционный ряд сходится значительно быстрее и, следовательно, требуется меньшее число членов при той же самой погрешности приближения. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работе [4].

Полученные в работе результаты были использованы автором при разработке автоматических интерполяторов, предназначенных для регистрации пространственных полей.

Выводы

1. Определена оценка величины V , характеризующей структурные свойства кривых распределения, через статистические характеристики случайного однородного параметрического поля.

2. Формулируются задачи дискретного метода измерения распределенных параметров и даются основные соотношения для расчета требуемых величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Л. Ицкович. Определение расстояния между датчиками при контроле пространственно распределенных полей. «Автоматика и телемеханика». № 2, 1963.
 2. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных функций. У. М. Н., т. VII, вып. 5, 1952.
 3. Э. Л. Ицкович. Определение необходимой частоты измерения при дискретном контроле. «Автоматика и телемеханика», т. XXII, № 2, 1961.
 4. И. Э. Наац. Определение граничного интервала квантования при регистрации пространственно распределенных параметров. Известия ТПИ, т. 138, 1965.
-