ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 168 1969

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ. II

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

3. Оценка среднего квадрата величины V для случайной функции. Будем полагать, что интерполированию подвергаются реализации некоторого случайного однородного поля (соответственно стационарного процесса), для которого известна корреляционная функция $K(h)$. Именно с такими задачами и приходится иметь дело при дискретном измерении и контроле технологических параметров [1].

Для случайной функции $f(x)$ при фиксированных узлах $x_к$ сумма

$$\sum_{к=0}^{2n-1} | f(x_к) - f(x_{к+1}) |$$

от одной реализации к другой принимает случайные значения и, следовательно, является случайной величиной.

Построим оценку среднего квадрата этой величины для однородного поля $f(x)$. Согласно (2.8) имеем

$$M[V^2] = M\left[\left(\sum_{к=0}^{2n-1}(f(x_к) - f(x_{к+1}))\right)^2\right]. \tag{3.1}$$

Воспользовавшись неравенством

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

(частный случай формулы Коши), преобразуем правую часть (3.1):

$$M\left[\left(\sum_{к=0}^{2n-1}(f(x_к) - f(x_{к+1}))\right)^2\right] \leqslant 2nM\left[\sum_{к=0}^{2n-1}(f(x_к) - f(x_{к+1}))^2\right] =$$

$$= 2n\sum_{к=0}^{2n-1}(M[f(x_к)^2] + M[f(x_{к+1})^2] - 2M[f(x_к)\cdot f(x_{к+1})]. \tag{3.2}$$

Слагаемые в последнем выражении представляют собой не что иное как значение корреляционной функции в соответствующих точках, т. е.

$$M[f(x_к)\cdot f(x_{к+1})] = K(x_к, x_{к+1}),$$

$$M[f(x_к)^2] = K(x_к, x_к),$$

$$M[f(x_{к+1})^2] = K(x_{к+1}, x_{к+1}).$$

В случае однородного случайного поля корреляционная функция не зависит от выбора точек $x_к$ и $x_{к+1}$, она полностью определяется расстоянием между этими точками [2].

Следовательно (3.2), окончательно примет вид

$$M\left[\left(\sum_{к=0}^{2n-1}(f(x_к)-f(x_{к+1}))\right)^2\right] \leqslant 8n^2[K(0)-K(x_{к+1}-x_к)]. \tag{3.3}$$

Для равноотстоящих узлов

$$M[V^2] = \overline{V^2} \leqslant 8n^2[K(0)-K(h)], \tag{3.4}$$

где

$$h = x_{к+1} - x_к = 2\pi/2n+1.$$

4. Определение числа узлов при заданной погрешности приближения $\sigma_з$ и погрешности измерения σ_0.

Если предположить, что корреляционная функция $K(h)$ определяется экспериментально по отсчетам в точках поля $x_к$ при погрешности измерительных приборов σ_0, то расстояние между узлами целесообразно выбирать не меньше, чем h_0, определяемое соотношением [3]:

$$K(0) - K(h_0) = \frac{\sigma_0^2}{2}\cdot$$

Действительно, дальнейшее уменьшение расстояния между отсчетами не дает увеличения точности определения корреляционной функции, а также любых других характеристик.

Исходя из этого, можно сделать следующий вывод: структурная характеристика $\overline{V}^2$ случайного поля $f(x)$, определяемая в данном случае через корреляционную функцию согласно (3.4), не может быть оценена точнее, чем $4n^2\sigma_0^2$, т. е.

$$\overline{V^2} = M\left[\left(\sum_{к=0}^{2n-1}(f(x_к)-f(x_{к+1}))\right)^2\right] \leqslant 4n^2\sigma_0^2, \tag{4.2}$$

где n определяется из уравнения

$$K(0) - K\left(\frac{L}{2n+1}\right) = \frac{\sigma_0^2}{2}\cdot \tag{4.3}$$

Представляя (4.2) в (2.12 ч. 1), получим

$$\sigma_{n,\,n+1} = \sigma_0,$$

т. е. в предельном случае при интерполировании по приближенным отсчетам ряд (1. ч. 1) необходимо ограничить тем членом, для которого

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)} \leqslant \sigma_0. \tag{4.5}$$

Все остальные члены ряда, начиная с n-го, по абсолютной величине меньше и поэтому должны быть отброшены как недостоверные.

Таким образом, полученные результаты дают решение следующей задачи дискретного измерения: каким числом узлов необходимо ограничиться при интерполировании рельефа поля $f(l)$ тригонометрическим полиномом, если отсчеты известны со среднеквадратичной погрешностью σ_0

В технических приложениях эта задача может быть сформулирована так: каким числом датчиков разумно ограничиться при контроле рельефа пространственного параметрического поля, если погрешность датчиков и измерительных приборов не превышает σ_0.

Теперь рассмотрим следующую задачу дискретного измерения: с какой среднеквадратичной погрешностью σ_m можно представить рельеф поля $f(l)$ по $(2m+1)$ дискретным отсчетам, если погрешность измерения значений поля σ_0. При решении этой задачи учитываем, что предельная величина погрешности интерполирования σ_m равна σ_0 при $m = n$.

Из (2.11) имеем

$$\sigma_m^2 = \frac{\overline{V^2}}{4} \sum_{\kappa=m+1}^{n} \frac{1}{\kappa^2} = n^2 \sigma_0^2 \sum_{\kappa=m+1}^{n} \frac{1}{\kappa^2}. \tag{4.6}$$

Величина суммы в (4.6) может приближенно оценена с помощью формулы Эйлера:

$$\sum_{\kappa=m+1}^{n} \frac{1}{\kappa^2} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{60}\left(\frac{1}{(m+1)^3} - \frac{1}{n^3}\right) + \ldots$$

Ограничиваясь двумя членами этого разложения, что вполне достаточно для практических расчетов, получим

$$\sigma_m = \sigma_0 \cdot n \sqrt{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{n^2}\right)}, \tag{4.7}$$

С помощью этого соотношения может быть решена и обратная задача, т. е. когда требуется определить необходимое число узлов интерполирования по заданной величине погрешности $\sigma_з$, при этом заведомо известно, что $\sigma_з > \sigma_0$. Необходимое число отсчетов $(2m+1)$ определится уравнением

$$\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{2}{m+1} - \frac{2\sigma_з^2 - \sigma_0}{n^2 \sigma_0^2} - \frac{2}{n} = 0. \tag{4.8}$$

В заключение рассмотрим структуру общей погрешности приближения по приближенным отсчетам. Общая погрешность складывается из неустранимой и устранимой погрешностей, т. е.

$$\sigma^2 = \sigma_з^2 + \sigma_н^2. \tag{4.9}$$

Выше было показано, что $\sigma_н = \sigma_0$ и в предельном случае $\sigma_у = \sigma_0$. В результате достижимая погрешность приближения

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \sqrt{2} \tag{4.10}$$

при интерполировании тригонометрическим полиномом по приближенным отсчетам.

Соотношения для расчета числа узлов получены в предположении, что реализации случайного поля образуют семейство функций ограниченной вариации и, вообще говоря, дают верхнюю грань возможных значений. Действительно, обычно кривые, описывающие распределение физических величин, как правило, гладки и непрерывны вместе с первой производной (градиентом поля), за исключением, может быть, на концах интервала. Но в этом случае, как известно, $a_n = 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$, т. е. интерполяционный ряд сходится значительно быстрее и, следовательно, требуется меньшее число членов при той же самой погрешности приближения. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работе [4].

Полученные в работе результаты были использованы автором при разработке автоматических интерполяторов, предназначенных для регистрации пространственных полей.

Выводы

1. Определена оценка величины V, характеризующей структурные свойства кривых распределения, через статистические характеристики случайного однородного параметрического поля.

2. Формулируются задачи дискретного метода измерения распределенных параметров и даются основные соотношения для расчета требуемых величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Л. Ицкович. Определение расстояния между датчиками при контроле пространственно распределенных полей. «Автоматика и телемеханика». № 2, 1963.
2. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных функций. У. М. Н., т. VII, вып. 5, 1952.
3. Э. Л. Ицкович. Определение необходимой частоты измерения при дискретном контроле. «Автоматика и телемеханика», т. XXII, № 2, 1961.
4. И. Э. Наац. Определение граничного интервала квантования при регистрации пространственно распределенных параметров. Известия ТПИ, т. 138, 1965.