ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 168 1969

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ РЕГИСТРАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

В. Ф. ДЯДИК, И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

Дискретные методы находят самое широкое распространение в регистрации технологических параметров ввиду быстродействия, компактной формы представления текущей информации.

Системы дискретной регистрации могут включать в себя устройства, осуществляющие формирование интерполирующей функции по дискретным отсчетам.

В настоящей статье рассматриваются основные вопросы применения принципа линейного интерполирования для регистрации кривых распределения параметра в дискретном методе измерения.

Принцип линейного интерполирования состоит в том, что показания двух смежных датчиков соединяются отрезком прямой и в целом по длине поля $[a, b]$ носит кусочно-линейный характер. Уравнение интерполирующей прямой для любой пары отсчетов $(y_i, \; y_{i+1})$ записывается в виде

$$P_1(x) = y_i + (y_{i+1} - y_i)\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \tag{1}$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i$ — узлы интерполирования $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ и $n + 1$ — число датчиков.

Значение параметра в любой точке между отсчетами по длине агрегата определяется, таким образом, выражением (1). При этом абсолютная погрешность δ определяется выражением

$$\delta \leqslant |f(x) - P_1(x)|. \tag{2}$$

Ниже рассматривается случай линейного интерполирования с равномерным шагом $h = x_{i+1} - x_i$ для любой пары точек. Остаточный член интерполяционной формулы (1) для промежутка интерполирования (x_i, x_{i+1}) имеет вид [1]:

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}). \tag{3}$$

Делая подстановку $t = \dfrac{x - x_i}{h}$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, получаем

$$(x - x_i)(x - x_{i+1}) = h^2 t(t - 1).$$

Произведение $t(t-1)$ принимает наибольшее по модулю значение при $t = \dfrac{1}{2}$, равное $\dfrac{1}{4}$.

В (3) точка ξ принадлежит интервалу (x_i, x_{i+1}). Введем величину $M_2 = \max|f''(\xi)|$

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Тогда

$$R_1 = \frac{M_2 h^2}{8}, \tag{4}$$

и величина h определяется выражением

$$h \leqslant \sqrt{\frac{8\delta}{M_2}}. \tag{5}$$

Соотношение (5) позволяет определить расстояние между двумя соседними узлами при линейном интерполировании для заданной величины ошибки интерполирования δ, а необходимое число отсчетов на отрезке интерполирования $[a, b]$

$$n + 1 = \frac{b-a}{h} + 1. \tag{6}$$

Формула (4) определяет погрешность интерполирования при условии, что отсчеты $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ и узлы интерполирования x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известны точно. Однако при решении задач регистрации распределенных параметров эти величины, как правило, известны приближенно.

Возникающая при этом погрешность называется неустранимой. так как она не может быть уменьшена за счет увеличения числа узлов, в отличие от погрешности интерполирования (погрешности метода), определяемой формулой (4).

Отсчеты y_i известны с погрешностью измерения значений параметра в точках отсчетов — σ_1, а погрешность фиксации узлов интерполирования — σ_2. Необходимо определить неустранимую погрешность в зависимости от значений σ_1 и σ_2.

Эту задачу можно рассматривать как задачу определения величины погрешности при косвенных измерениях по известным погрешностям прямых измерений [2].

Согласно теореме сложения частных погрешностей для уравнения (1) имеем

$$\sigma^2(x) = \left(\frac{\partial P_1}{\partial y_0}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_0}\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_2^2. \tag{7}$$

Вычислив значения частных производных, получим:

$$\sigma^2(x) = \left[1 - \frac{2}{h}(x - x_0) + \frac{2}{h^2}(x - x_0)^2\right]\sigma_1^2 +$$

$$+ \frac{(y_1 - y_0)^2}{h^4}\left[(x - x_0 - h)^2 + (x_0 - x)^2\right]\sigma_2^2. \tag{8}$$

Первое слагаемое выражения (8) есть составляющая неустранимой погрешности, обусловленная неточностью отсчетов, второе слагаемое — неточностью фиксации узлов интерполирования. Выражение (8) определяет значение неустранимой погрешности для любого x в промежутке между двумя отсчетами. Для определения диапазона изменения σ на интервале интерполирования определяются наибольшие и наименьшие значения σ. С этой целью исследуются выражения, стоящие в квадратных скобках формулы (8) на экстремум, и определяются значения $\sigma(x)$ в точках отсчетов. Соответственно находим для узлов (x_0, x_1)

$$\sigma(x_0) = \sqrt{\sigma_1^2 + \frac{(y_1 - y_0)^2}{h^2}\sigma_2^2},$$

$$\sigma(x_1) = \sqrt{\sigma_1^2 + \frac{(y_1 - y_0)^2}{h^2}\sigma_2^2}, \tag{9}$$

$$\sigma\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 + \frac{(y_1 - y_0)^2}{h^2}\sigma_2^2\right]}.$$

Максимальная неустранимая погрешность имеет место в точках отсчета, минимальная в $\sqrt{2}$ раз меньшая — в середине интервала (x_0, x_1).

Если $\sigma_2 = 0$, то выражения (9) соответственно имеют вид

$$\sigma_y(x_0) = \sigma_1; \quad \sigma_y(x_1) = \sigma_1; \quad \sigma_y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

т. е. максимальная неустранимая погрешность уравнения (1), обусловленная неточностью измерения отсчетов, равна самой погрешности измерения.

Минимальная в $\sqrt{2}$ меньше погрешности измерения. При равенстве нулю σ_1 имеет место неустранимая погрешность, обусловленная неточностью фиксации узлов интерполирования, при условии, что сами отсчеты y_i заданы точно. Соответствующие значения этой погрешности определяются:

$$\sigma_x(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}\sigma_2,$$

$$\sigma_x(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h}\sigma_2, \tag{11}$$

$$\sigma_x\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{2}h}\sigma_2.$$

Анализ выражений (11) показывает, что неустранимая погрешность, обусловленная неточностью фиксации узлов интерполирования, зависит от величины $\frac{y_1 - y_0}{h}$ — градиента интерполируемой функции между двумя соседними отсчетами. Максимальное значение этой погрешности — так же в точках отсчетов, минимальное — в середине интервала.

Выводы

1. Рассмотрены основные вопросы применения принципа линейного интерполирования для регистрации кривых распределения параметра в дискретном методе измерения.

2. Дана методика расчета необходимого числа отсчетов.

3. Определена неустранимая погрешность интерполирования, обусловленная неточностью отсчетов и неточностью фиксации узлов интерполирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 1, Физматгиз, М., 1962.

2. М. Ф. Маликов. Основы метрологии, ч. 1. Машгиз, М., 1949.