ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 168 1969

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ФИЛЬТРОВ

А. Н. ЛАФЕРОВ, И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории ТПИ)

При решении многих инженерных задач приходится пользоваться преобразованием Фурье. В частности, определение реакции $\gamma(t)$ фильтра низкой частоты (ФНЧ) при действии на вход устройства сигнала, спектр которого известен. Решение задачи дается выражением

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot K(\omega)\, e^{j\omega t}\, \alpha\, \omega, \tag{1}$$

где

$S(\omega)$ — спектр входного сигнала,

$K(\omega) = |F(j\omega)|$ — модуль передаточной функции фильтра.

Нахождение такого интеграла сводится к вычислению синус- или косинус-преобразований, которые для четной и нечетной функций запишутся:

$$\gamma(t) = \int_{0}^{\infty} \psi(\omega)_{\sin}^{\cos}\, \omega t\, d\omega. \tag{2}$$

В рассматриваемой задаче

$$S(\omega) = A\delta\, \frac{\sin\frac{\delta}{2}\,\omega}{\frac{\delta}{2}} - \tag{3}$$

— спектр прямоугольного импульса длительности δ;

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}}} - \tag{4}$$

— спектральная характеристика ФНЧ по Баттерворту порядка m с частотой среза ω_c, поэтому

$$\Psi(\omega) = S(\omega)\cdot K(\omega) = \frac{A\delta \sin\frac{\delta}{2}\,\omega}{\frac{\delta}{2}\,\omega\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}}}\,. \tag{5}$$

Существуют специальные таблицы вычисления преобразования Фурье, для случаев, когда специальная функция $\Psi(\omega)$ выражается через элементарные или специальные функции.

Для вычисления интеграла (2) можно построить механическую квадратуру:

$$\gamma(t) = \int\limits_0^\infty \Psi(\omega)^{\cos}_{\sin}\,\omega\, d\omega \approx \sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa \cdot \varphi(x_\kappa). \tag{6}$$

Коэффициент A_κ и x_κ для узлов можно найти в [1], при этом необходимо представить спектральную функцию (5) в виде

$$\Psi(\omega) = \frac{\Phi(x)}{(1+x)^{s+1}}, \tag{7}$$

где $i = 1, 2, 3 \ldots$ и s — порядок роста.

Представление (7) вызывает, в свою очередь, дополнительные вычисления. Описываемый ниже метод решения позволяет привести интеграл (1) к табличному. Для этого предлагается в подынтегральном выражении (1) геометрически перемножить $S(\omega)$ и $K(\omega)$, а затем произвести аппроксимацию отдельных участков получившегося графика функций $\Psi(\omega)$.

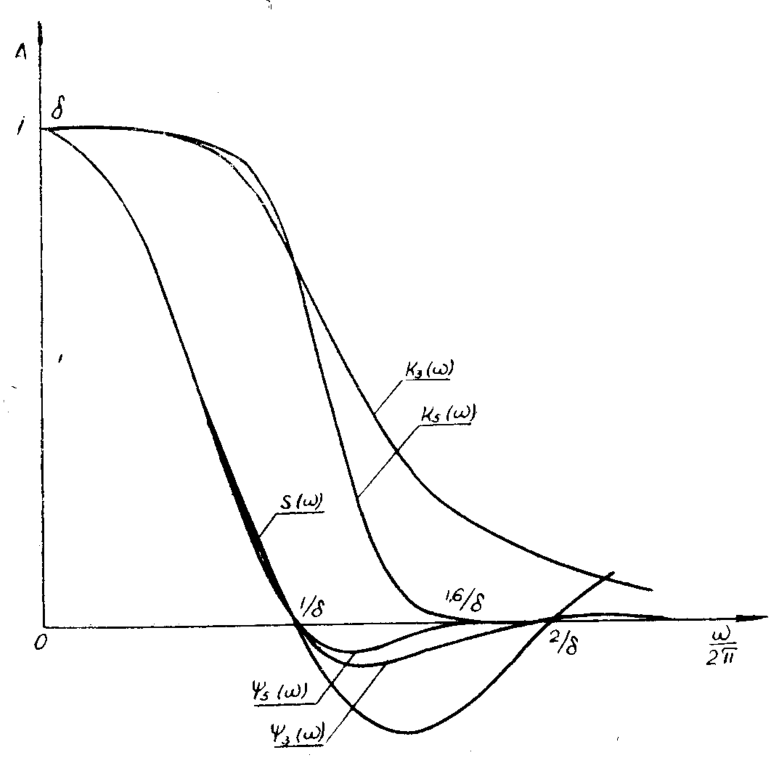

Рис. 1. Спектральные характеристики активного фильтра НЧ в приближении по Баттерворту для $m = 3$ и $m = 5$

На рис. 1 приведены графики функций $S(\omega)$, $K(\omega)$ для $m = 5$, $m=3$, при частоте среза $\omega_c = 1/\delta$. Полученные функции $\Psi_5(\omega)$ и $\Psi_3(\omega)$ нормированы к 1. Из графика видно, что на участке $0 \div 1/\delta$ $\Psi_5(\omega)$ с большой точностью совпадает с функцией $S(\omega)$, а на интервале $1/\delta \div 1{,}6/\delta$ произведем аппроксимацию многочленом Лагранжа [2] по 4 точкам: $1/\delta$, $1{,}2/\delta$, $1{,}4/\delta$, $1{,}6/\delta$.

Значениями спектральной функции в интервале $1{,}6/\delta \div \infty$ пренебрегаем ввиду малости. В результате имеем

$$\Psi_5(\omega) = \left.\frac{\sin \omega \dfrac{\delta}{2}}{\omega \dfrac{\delta}{2}}\right|_0^{1/\delta} - \frac{1}{\delta}\left[1{,}72\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3 - 7{,}09\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 + 9{,}57\,\frac{\omega}{2\pi} - 4{,}2\right]_{1/\delta}^{1{,}6/\delta}. \tag{8}$$

Косинус-преобразование первого члена (8) дает

$$\varphi(t) = \int_0^{1/\delta} \frac{\sin \omega \dfrac{\delta}{2} \cos \omega t}{\omega \dfrac{\delta}{2}}\, d\omega = \frac{1}{\delta}\,[Si(t+0{,}5) - Si(t-0{,}5)]. \tag{9}$$

Полное выражение ФНЧ на импульс конечной длительности δ запишется следующим образом:

$$\gamma(t) = \varphi(t) + h(t) = \frac{1}{\delta}\Bigg\{[Si(t+0{,}5) - Si(t-0{,}5)] - \int_{1/\delta}^{1{,}6/\delta}\left[1{,}72\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3 - 7{,}09\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 + 9{,}57\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) - 4{,}2\right]\cos \alpha t\, d\omega. \tag{10}$$

В этом выражении все интегралы являются табличными. Первое слагаемое в (10) представляет собой реакцию системы на импульс длительности δ идеального фильтра, для которого

$$K(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ при } \omega \leqslant \omega_c, \\ 0 \text{ при } \omega > \omega_c \end{cases}$$

при этом, как следует из (4), $\varphi(t)$ тем точнее соответствует реакции фильтра, чем больше m. Второе слагаемое $h(t)$ вносит поправку, получаемую за счет конечного δ и с ростом последнего $|h(t)| \to 0$. При условии $\delta \ll \tau_c$ (τ_c — постоянная фильтра), $S(\omega) = \mathrm{const}$, определяющим параметром реакции на выходе фильтра является порядок m (кривые $K_5(\omega)$, $K_3(\omega)$, рис. 1). Расчеты показывают, что уже при $m = 5$ ($\tau_c = \delta$) энергетический вклад высоких частот спектральной функции $\Psi_5(\omega)$ составляет не более 3,6%. Для $\Psi_3(\omega)$ этот вклад гораздо больше.

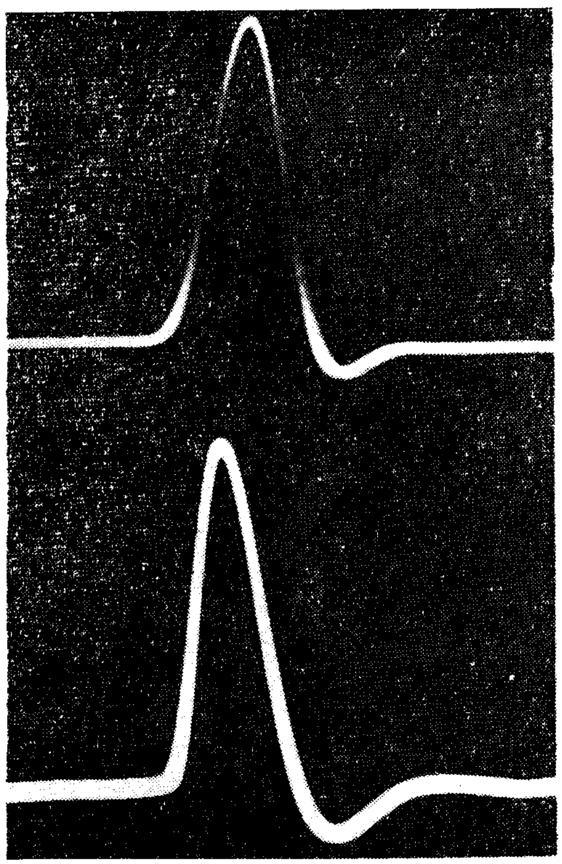

Рис. 2. Реакции ФНЧ на импульс конечной длительности для $m = 5$ (верхний) и $m = 3$ (нижний)

Учитывая, что ВЧ компоненты спектра влияют главным образом на значение функции в области $t=0$, можно предположить, что $\gamma_3'(t) > \gamma_5'(t)$. Данное положение иллюстрируется осциллограммами на рис. 2 для верхней осциллограммы — $m=5$, для нижней — $m=3$ и рис. 1 ($\Psi_5(\omega)$ в интервале $1/\delta \div 2/\delta$).

Выводы

В статье приводится метод приближенного вычисления обратного преобразования Фурье для анализа радиотехнических устройств и на примере активного фильтра НЧ по Баттерворту дается исследование влияния параметров устройства на импульсную функцию.

Приведенная методика остается справедливой и для преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Кругликова. Таблицы для численного преобразования Фурье. «Наука и техника», 1964.
2. А. Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. «Наука», 1964.
3. А. Лаферов. Дипломная работа. ТПИ, 1966.