ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 169 1968

О ФЛУКТУАЦИЯХ ЧИСЛА КВАНТОВ В ПУЧКЕ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ БЕТАТРОНА

В. А. ВОРОБЬЕВ, Г. П. ТАРАСОВ

(Рекомендована научным семинаром научно-исследовательского института электронной интроскопии)

Введение

Использование пучков тормозного излучения в физических экспериментах, а также расчет технических устройств, в которых применяется тормозное излучение бетатрона (в частности, радиационных дефектоскопов и интроскопов) при корректной оценке точности эксперимента и чувствительности устройств требует знания статистических характеристик излучения. Однако применение обычных статистических методов описания пучка тормозного излучения следует вести с осторожностью; в строгой постановке вопроса пучок излучения описывается обобщенным сингулярным случайным полем [1], так что распределение вероятностей для описывающей пучок функции в каждой конкретной точке не существует, хотя практически всегда будет получено, ибо измерительный прибор, с помощью которого мы будем регистрировать пучок, неизбежно производит усреднение по энергетическому спектру, времени и площади регистрации. В статье, при некоторых ограничениях, упомянутых ниже, описываются статистические характеристики пучка.

Модель процесса генерации

А. Нами принята следующая модель описываемого процесса. Поток ускоренных электронов бетатрона, сбрасываемый на мишень-радиатор, представляет последовательность импульсов, длительностью $\tau \approx (3-15)$ 10^{-6} сек, следуемых с частотой f. Каждый импульс $n_к(E_e i t)$ имеет определенную форму во времени t и распределение числа электронов по энергиям E_e, так что общее число электронов в пачке определяется:

$$n_к = \int_0^{\tau_к} \int_0^{E_{кm}} n_к(E_e;\ t)\, dE_e dt. \tag{1}$$

Малая временная длительность импульса $\tau_к$ по сравнению с интервалами времени регистрации Δt, имеющими место в большинстве случаев практики, и незначительный энергетический разброс электронов в конкретном импульсе по сравнению со средней энергией $E_к$ в этом импульсе позволяют аппроксимировать распределения $n_к(E_e;\ t)$ δ-функциями, т. е.

$$n_к(E_e;\ t) = n_к \delta(E - E_к)\, \delta(t - t_к). \tag{2}$$

Таким образом, конкретная s-ая реализация случайного процесса $n(E_e;\ t)$ может быть представлена последовательностью:

$$n^{(s)}(E_e;\ t) = \sum_{-\infty}^{\infty} n_\kappa^{(s)} \delta(E_e - E_{e\kappa}^{(s)})\, \delta(t - t_\kappa^{(s)}). \qquad (3)$$

Множество последовательностей $n(E_e; t)$ образует некоторое функциональное пространство $R(n)$, на котором обычным образом может быть задано распределение вероятностей.

Б. Пучок квантов тормозного излучения описывают заданием функции распределения числа квантов [6] по элементам $d\Gamma = dFdE\Omega dt$ фазового пространства Γ, образованного прямым произведением множеств:

$F(x, y)$ — плоскость, $\{E\}$— энергия кванта, $\{\Omega\}$ — направление, $\{t\}$ — время. Если регистрация пучка осуществляется в плоскости F, перпендикулярной оси пучка и расположенной на расстоянии r_0 от мишени, то нам удобно будет воспользоваться фазовым пространством $\Gamma = E \times \Omega \times T$, так как существует однозначное соответствие между $d\Omega$ и dF. Обозначая совокупность переменных $(E;\ \vec{O};\ t)$ вектором $\vec{\Gamma} \in \Gamma$, мы s-ую реализацию функции распределения числа квантов в Γ будем записывать: $N^{(s)}\ (\vec{\Gamma})$. Множество реализаций $N(\Gamma)$ образует функциональное пространство $R(N)$, элементами которого будут поля, определенные на Γ. В $R(N)$ также может быть задано распределение вероятностей.

В. Теперь мы можем процесс генерации пучка тормозного излучения математически представить стохастическим отображением $T^{\text{п}}$ пространства $R(n)$ в пространство $R(N)$.

$$R(N) = T^{\text{п}} R(n). \qquad (4)$$

Физический смысл стохастического оператора $T^{\text{п}}$ заключается в том, что даже при детерминированности n (n не флуктуируют) в силу квантовой природы процессов радиации поток излучения будет флуктуировать. Таким образом, флуктуации поля $N(\Gamma)$, описывающие пучок тормозного излучения, определяются как флуктуациями потока ускоренных электронов n, так и квантовым характером процессов торможения на мишени, что описывается $T^{\text{п}}$. Как уже упоминалось, строгое описание поля $N(\vec{\Gamma})$ требует привлечения аппарата обобщенных случайных функций [1, 2]. Мы не будем пользоваться ими, но упомянем следующие положения: а) обобщенное случайное поле $N(\Gamma)$ является пределом последовательности гильбертовых случайных полей [2] (т. е. полей с ограниченной дисперсией), последовательность ковариантных функций которых содержит δ-образную последовательность; б) гильбертово случайное поле может быть аппроксимировано простыми полями (т. е. принимающими конечное число значений— постоянное значение N_m на $\Delta\Gamma_m \subset \Gamma$)

Допущения

Вероятностные характеристики $N(\vec{\Gamma})$ будут рассмотрены с учетом следующих ограничений:

1. Случайный процесс $n(E_e; t)$, описывающий поток ускоренных электронов, сбрасываемых на мишень, эргодичен; 2) частота циклов ускорения $f(t)$ является стационарным случайным процессом; 3) процессы радиации аддитивны, т. е. каждый электрон при торможении в мишени взаимодействует с ней независимо от других электронов пачки;

4) пренебрегаем многофотонными процессами на мишени; 5) условная вероятность $p_{ij} E_e$ излучения γ-кванта с энергией в интервале $E_i \div E_i + \Delta E_i$ в телесный угол $\Delta\Omega_j$ по направлению $\vec{\Omega}_j$ при условии, что тормозящийся электрон имел начальную энергию $E_e \div E_e + dE_e$ определяется через сечение Σ $(E_e; E; \Omega)$ выхода тормозного излучения [5]:

$$p_{ij}(E_e) = \int\limits_{\Delta E_i}\int\limits_{\Delta\Omega_j} \frac{d\Sigma(E_e; E; \Omega)}{\partial E \partial\Omega} d\Omega dE \approx \frac{d\Sigma}{\partial E\partial\Omega}\Bigg|_{\substack{E \in \Delta E_i \\ \Omega \in \Delta\Omega_j}} \cdot \Delta E_i \Delta\Omega_j \tag{5}$$

(для тонких радиаторов можно воспользоваться формулой Шиффа); 6) флуктуации рассматриваются малыми, т. е. отклонения от средних значений с заметной вероятностью по крайней мере на порядок меньше средних значений.

Согласно выражению (1) каждая реализация $N(\Gamma)$ может быть представлена

$$N(\Gamma) = \langle N(\Gamma)\rangle + \delta N(\Gamma) = [\langle T^{п}\rangle + \delta T](\langle n\rangle + \delta n) =$$

$$= \langle T^{п}\rangle\langle n\rangle + [\langle T^{п}\rangle \delta n + \delta n + \delta T\langle n\rangle + \delta T\delta n), \tag{6}$$

где

$$\langle N(\Gamma)\rangle = \langle T^{п}\rangle\langle n\rangle \text{ — среднее значение,}$$

$$\delta N(\Gamma) = \langle T^{п}\rangle\delta n + \delta T\langle n\rangle + \delta T\delta n \text{ — отклонение от среднего.}$$

Учитывая малость флуктуаций, последним членом пренебрегаем, а в силу аддитивности процессов радиации на мишени усреднение квадрата δN по всем реализациям будет содержать два члена, так как

$$M(\delta T\langle n\rangle \cdot \delta n) = 0. \tag{7}$$

Отсюда можно заключить, что поле $N(\vec{\Gamma})$, описывающее пучок тормозного излучения, является суммой двух некоррелированных компонент: одна компонента обусловлена флуктуациями потока электронов, другая — вероятностным характером процессов на мишени.

Ковариантная функция поля

На рис. 1 дано упрощенное изображение отрезка s-ой реализации случайного процесса $n(E_e; t)$. Здесь $t_к$ — моменты начала интервалов наблюдения, $\Delta t_к$ — длительности соответствующих интервалов. Пусть i-ый импульс ускоренных электронов содержит $n_{кl}^{(s)}$ электронов с энергией $E_{кl}$ ($к$ — номер временного интервала). В силу аддитивности взаимодействия число γ-квантов $\Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ij})$ в элементе $\Delta\Gamma_{ijк} = \Delta E_i \Delta\Omega_j \Delta t_к$ фазового пространства от i-го импульса распределено по биномиальному закону с условным средним значением:

$$\overline{\Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ijк})} = n_{кl}^{(s)} p_{ij}(E_{кl}). \tag{8}$$

За время $\Delta t_к$ (интервал $t_к \div t_к + \Delta t_к$) число квантов $\Delta N^{(s)}(\Delta\Gamma_{ijк})$ будет образовано наложением полей от ряда импульсов, которые уложились в $\Delta t_к$, следуя с частотой

$$f_к = f_0 + \Delta f_к;$$

$$\Delta N^{(s)}(\Delta\Gamma_{ijк}) = \sum_{l=1}^{f_к \Delta t_к} \Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ijк}) = \sum_{l=1}^{f_к \Delta t_к} [\overline{\Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ijк})} + \delta\Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ijк})]. \tag{9}$$

Так как $n_{\kappa l}^{(s)} = <n> + \Delta n_{\kappa l}^{(s)}$ флуктуирует от цикла к циклу ускорения, а также флуктуирует энергия ускоренных электронов $E_{\kappa l}^{(s)}$, то условное математическое ожидание $\Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ij\kappa})$ будет случайной величиной, которую представим:

$$\overline{\Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ij\kappa})} = [<n> + \Delta n_{\kappa l}^{(s)}]\,[p_{ij} + \Delta p_{ij}(E_{\kappa l}^{(s)})], \tag{10}$$

где $<n>$ — среднее значение числа ускоренных электронов в импульсе усредненное по всем реализациям s.

$\Delta n_{\kappa l}^{(s)}$ — отклонение от среднего в i-ом цикле ускорения на интервале Δt_κ реализации s.

$\Delta p_{ij}(E_{\kappa l}) = \left.\dfrac{\partial p_{ij}(E_e)}{\partial E_e}\right|_{E_e = E_0} \cdot \Delta E_{\kappa l} = a_{ij}\Delta E_{\kappa l}$ — изменение вероятности излучения в элемент $\Delta\Gamma_{ij\kappa}$ в связи с отклонением энергии $E_{\kappa l}$ от средней E_0

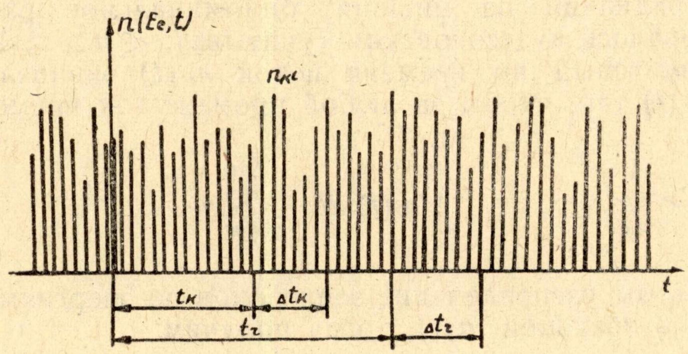

Рис. 1. Модель отрезка s-ой реализации последовательности импульсов ускоренных электронов, сбрасываемых на мишень

С учетом этого отклонение от среднего $\delta\Delta N^{(s)}(\Delta\Gamma_{ij\kappa})$ числа квантов в $\Delta\Gamma_{ij\kappa}$ представляется:

$$\delta\Delta N^{(s)}(\Delta\Gamma_{if\kappa}) = <n> \sum_{l=1}^{f_0\Delta t_\kappa f} \Delta p_{ij}(E_{\kappa l}^{(s)}) + p_{ij}\sum_{l=1}^{f_0\Delta t_\kappa} \Delta n_{\kappa l}^{(s)} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\Delta f_\kappa \Delta t_\kappa} <n> p_{ij} + \sum_{l-1}^{{}_0\Delta t_\kappa} \delta\Delta N_l^{(s)}(\Delta\Gamma_{ij\kappa}) + 0. \tag{11}$$

Здесь было принято

$$<\Delta N(\Delta\Gamma_{ij\kappa})> = <n> p_{ij} f_0 \Delta t_\kappa \tag{11a}$$

— безусловное математическое ожидание числа квантов в $\Delta\Gamma_{ij\kappa}$ 0 — величины второго порядка малости относительно среднего значения.

Написав выражение для $\delta\Delta N^{(s)}(\Delta\Gamma_{pqr})$ и умножив его на (11), после усреднения по реализациям s (в силу эргодичности $n(\ )$ — по промежуткам (Δt_κ) найдем ковариацию $K^{\Delta}_{ij\kappa,\,pqr}$ между случайными величинами: $\Delta N(\Delta\Gamma_{ij\kappa})$ — числом квантов в ячейке $\Delta\Gamma_{ij\kappa} = \Delta E_i \Delta\Omega_j \Delta t_\kappa$ фазового пространства и $\Delta N(\Delta\Gamma_{pqr})$ — числом квантов в $\Delta\Gamma_{pqr}$ с учетом допущений (§ 3):

$$K^{\Delta}_{ij\kappa,\,pqr} = <n>^2 a_{ij} a_{pq} \sum_{l=1}^{f_0\Delta t_\kappa} \sum_{m=1}^{f_0\Delta t_r} K^E_{\kappa l,\,rm} + p_{ij} p_{pq} \sum_{l=1}^{f_0\Delta t_\kappa} \sum_{m=1}^{f_0\Delta t_r} K^n_{\kappa l,\,rm} +$$

$$+ <n>^2 p_{ij} p_{pq} \Delta t_\kappa \Delta t_r K^f_{\kappa,\,r} + <n> p_{ij} a_{pq} \sum_{l=1}^{f_0\Delta t_\kappa} \sum_{m=1}^{f_0\Delta t_r} K^{n,\,E}_{\kappa l,\,rm} +$$

$$+ <n> a_{ij} p_{pq} \sum_{l=1}^{f_0\Delta t_\kappa} \sum_{m=1}^{f_0\Delta t_r} K^{E,\,n}_{\kappa l.\,rm} + <n> f_0 \, [p_{ij}\Delta t_\kappa]^{\frac{1}{2}} \, [p_{pq}\Delta t_r]^{\frac{1}{2}} \, \delta_{ij\kappa,\,pqr}, \qquad (12)$$

где

$$K^E_{\kappa l,\,rm} = M\,[\Delta E_{\kappa l}\cdot\Delta E_{rm}] \qquad K^{n,\,E}_{\kappa l,\,rm} = M\,[\Delta n_{\kappa l}\cdot\Delta E_{rm}]$$

$$K^n_{\kappa l,\,rm} = M\,[\Delta n_{\kappa l}\cdot\Delta n_{rm}] \qquad K^{E,\,n}_{\kappa l,\,rm} = M\,[\Delta E_{\kappa l}\cdot\Delta n_{rm}]$$

$$K^f_{\kappa,\,r} = M\,[\Delta f_\kappa\cdot\Delta f_r]$$

При вычислении составляющей, обусловленной статистическим характером радиации на мишени, биноминальное распределение аппроксимировалось пуассоновским (учитывая: $<n> \approx 10^{10}$; $p_{ij} \ll 1$). Заменим импульсный во времени поток $n_\kappa(t)$ эквивалентным непрерывным $n(t)$ так, чтобы за любой промежуток времени

$$\Delta t_\kappa > \frac{1}{f_0} \qquad \int_0^{\Delta t_\kappa} n(t)\,dt = \sum_{i=1}^{f_0\Delta t_\kappa} n_i \qquad (13)$$

и сохранялось бы распределение электронов по энергиям (т. е. здесь речь идет об огибающей $n(t)$), тогда получим:

$$K^{\Delta}_{ij\kappa,\,pqr} = \frac{<i>^2}{e^2} a_{ij} a_{pq} \int_0^{\Delta t_\kappa}\int_0^{\Delta t_r} K^E(t_1 t_2)\,dt_1 dt_2 +$$

$$+ p_{ij} p_{pq} \frac{1}{e^2} \int_0^{\Delta t_\kappa}\int_0^{\Delta t_r} K^i(t_1 t_2)\,dt_1 dt_2 + <i> p_{ij} a_{pq} \frac{1}{e^2} \int_0^{\Delta t_\kappa}\int_0^{\Delta t_r} K^{i,\,E}(t_1 t_2)\,dt_1 dt_2 +$$

$$+ <i> a_{ij} p_{pq} \frac{1}{e^2} \int_0^{\Delta t_\kappa}\int_0^{\Delta t_r} K^{E,\,i}(t_1 t_2))\,dt_1 dt_2 +$$

$$+ \frac{<i>^2}{f_0^2} p_{ij} p_{pq} \frac{1}{e^2} \int_0^{\Delta t_\kappa}\int_0^{\Delta t_r} K^f(t_1 t_2)\,dt_1 dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{e}\left[p_{ij}\int_0^{\Delta t_\kappa} <i>\,dt_1\right]^{\frac{1}{2}} p_{pq} \int_0^{\Delta t_r} <i>\,dt_2 \,\Big]^{\frac{1}{2}} \delta_{ij\kappa,\,pqr}. \qquad (14)$$

Данное выражение (11) определяет ковариацию между числом квантов с энергией $E_i \div E + \Delta E_i$, распространяющихся в телесном угле $\Delta\Omega_j$, вокруг Ω_j в течение Δt_κ и числом квантов с энергией $E_p \div E_p + \Delta E_p$, распространяющихся в телесном угле $\Delta\Omega_q$ вокруг Ω_q в течение Δt_r, т. е. для простого случайного поля $N(\Gamma_{ij\kappa})$, для которого

$$\Delta N(\Delta\Gamma_{ij\kappa}) = N(\Gamma_{ij\kappa})\,\Delta\Gamma$$

и соответственно

$$K^{\Delta}_{ijk,\,pqr} = K[\Delta N(\Delta\Gamma_{ijk});\ \Delta N(\Delta\Gamma_{pqr})] = \Delta\Gamma^2 K[N(\overrightarrow{\Gamma}_{ijk});\ N(\overrightarrow{\Gamma}_{pqr})]. \qquad (15)$$

Выше упоминалось что поле $N(\Gamma)$, описывающее пучок тормозного излучения, является пределом последовательности простых полей, а его ковариантная функция — пределом соответствующей последовательности ковариантных функций простых полей, т. е.

$$K_N(\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2) = K[N(\mathbf{\Gamma}_1);\ N(\mathbf{\Gamma}_2)] = \lim_{\Delta\Gamma\to 0}\left[\frac{1}{\Delta\Gamma^2}K^{\Delta}_{ijk,\,pqr}\right]. \qquad (16)$$

Учитывая $\Delta\Gamma = \Delta E\Delta\Omega\Delta t = \Delta\Gamma'\Delta t$ из выражений (14 и 16), переходя к пределу, получим

$$K_N(\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2) = \sum_{s=1}^{6} C^*_s(\mathbf{\Gamma}'_1\mathbf{\Gamma}'_2)\,K_s(t_1t_2), \qquad (17)$$

где

$$C^*_1(\mathbf{\Gamma}'_1\mathbf{\Gamma}'_2) = \frac{1}{e^2}<i>^2 a^*(\mathbf{\Gamma}'_1)\,a^*(\mathbf{\Gamma}'_2) \qquad K_1(t_1t_2) = K^E(t_1t_2)$$

$$C^*_2(\mathbf{\Gamma}'_1\mathbf{\Gamma}'_2) = \frac{1}{e^2}b^*(\mathbf{\Gamma}'_1)\,b^*(\mathbf{\Gamma}'_2) \qquad K_2(t_1t_2) = K^i(t_1t_2)$$

$$C^*_3(\mathbf{\Gamma}'_1\mathbf{\Gamma}'_2) = \frac{1}{e^2}<i>b^*(\mathbf{\Gamma}'_1)\,a^*(\mathbf{\Gamma}'_2) \qquad K_3(t_1t_2) = K^{i,E}(t_1t_2)$$

$$C^*_4(\mathbf{\Gamma}'_1\mathbf{\Gamma}'_2) = \frac{1}{e^2}<i>a^*(\mathbf{\Gamma}'_1)\,b^*(\mathbf{\Gamma}'_2) \qquad K_4(t_1t_2) = K^{E,i}(t_1t_2)$$

$$C^*_5(\mathbf{\Gamma}'_1\mathbf{\Gamma}'_2) = \frac{1}{e^2f_0^2}<i>^2 b^*(\mathbf{\Gamma}'_1)\,b^*(\mathbf{\Gamma}'_2) \qquad K_5(t_1t_2) = K^f(t_1t_2)$$

$$C^*_6(\mathbf{\Gamma}'_1\mathbf{\Gamma}'_2) = \frac{<i>}{e}[b^*(\mathbf{\Gamma}'_1)\,b^*(\mathbf{\Gamma}'_2)]^{\frac{1}{2}}\,\delta(\mathbf{\Gamma}'_1-\mathbf{\Gamma}'_2) \quad K_6(t_1t_2) = \delta(t_1-t_2).$$

Здесь e — заряд электрона;

$<i>$ — средний ток с мишени, при условии, что все электроны останавливаются в ней;

f_0 — средняя частота циклов ускорения.

$$b^*(\mathbf{\Gamma}'_j) = \left.\frac{d\Sigma(E_e,\ E,\ \overleftarrow{\mathbf{\Omega}})}{\partial E\partial\Omega}\right|_{\substack{E=E_j\\ \Omega=\Omega_j}} \quad a^*(\mathbf{\Gamma}'_j) = \left.\frac{\partial b^*(\mathbf{\Gamma}'_j)}{\partial E_e}\right|_{E_e=E_0}, \qquad (19)$$

вектор $\mathbf{\Gamma}' = (E,\ \Omega)$ лежит на $E\times\Omega$.

Переходя от телесных углов к облучаемым площадкам известным преобразованием: $d\Omega = \frac{1}{r_0^2}dF$, вместо $N(E,\ \vec{\mathbf{\Omega}},\ t)$ будем писать $N_0(\mathbf{r},\ E,\ t)$. Ковариантная функция поля $N_0(\mathbf{\Gamma})$ где $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{r},\ E,\ t)$ теперь имеет вид:

$$K_{N_0}(\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2) = \sum_{s=1}^{6} C_s(\mathbf{\Gamma}''_1\mathbf{\Gamma}''_2)\,K_s(t_1t_2), \qquad (20)$$

где

$$C_1(\mathbf{\Gamma}''_1\mathbf{\Gamma}''_2) = \frac{1}{e^2}<i>^2 a(\mathbf{\Gamma}''_1)\,a(\mathbf{\Gamma}''_2) \qquad C_4(\mathbf{\Gamma}''_1\mathbf{\Gamma}''_2) = \frac{1}{e^2}<i>a(\mathbf{\Gamma}''_1)\,b(\mathbf{\Gamma}''_2)$$

$$C_2(\mathbf{\Gamma}''_1\mathbf{\Gamma}''_2) = \frac{1}{e^2}b(\mathbf{\Gamma}''_1)\,b(\mathbf{\Gamma}''_2) \qquad C_5(\mathbf{\Gamma}''_1\mathbf{\Gamma}''_2) = \frac{1}{e^2f_0^2}<i>^2 b(\mathbf{\Gamma}''_1)\,b(\mathbf{\Gamma}''_2)$$

$$C_3(\Gamma_1''\Gamma_2'') = \frac{1}{e^2} < i > b(\Gamma_1'')\, a(\Gamma_2'')$$

$$C_6(\Gamma_1''\Gamma_2'') = \frac{1}{e} < i > [b(\Gamma_1'')\, b(\Gamma_2'')]^{\frac{1}{2}} \delta(\Gamma_1'' - \Gamma_2'').$$

Здесь

$$a(\Gamma_j'') = \beta a^*(\Gamma_j') \qquad b(\Gamma_j'') = \beta b^*(\Gamma_j') \qquad \beta = \frac{1}{r_0^2}\, \Gamma'' = (r,\ E).$$

Среднеквадратичные флуктуации

δ — коррелированность случайного поля $N_0(\vec{\Gamma})$ заставляет нас понимать его в смысле обобщенной функции, ибо не имеет смысла говорить о распределении вероятностей для $N_0(\Gamma)$ в каждой конкретной точке $\vec{\Gamma}$, т. е. в данной точке $\vec{r}$ облучаемой поверхности в фиксированный момент времени t, так как дисперсия бесконечна. Однако любой измерительный прибор, с помощью которого мы будем регистрировать $N_0(\vec{\Gamma})$, производит усреднение по некоторому объему фазового пространства $\Delta\Gamma$: имеет определенное энергетическое ΔE и угловое разрешение $\Delta\Omega$, конечную плоскую апертуру ΔF и инерционность ΔT. То есть, вместо $\vec{N}_0(\Gamma)$ на выходе измерителя мы будем наблюдать величину

$$\Phi_0(\varphi) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(\Gamma)\, N_0(\Gamma)\, d\Gamma, \tag{22}$$

являющуюся функционалом, определенным на характеристиках $\varphi(\vec{\Gamma})$ приборов. Вычислим дисперсию $D\Phi_0$ для простейшего случая:

$$\varphi(\Gamma) = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta\Gamma} \text{ при } \Gamma \in \Delta\Gamma \\ 0 \text{ при } \Gamma \bar{\in} \Delta\Gamma \end{array} \right., \qquad \Delta\Gamma = \Delta F \Delta E \Delta T$$

С учетом (20):

$$D\Phi_0(\varphi) = M\left\{ \int\limits_{\Gamma} \varphi(\Gamma)\, [N_0(\Gamma) - < N_0(\Gamma) >]\, d\Gamma \right\}^2 =$$

$$= \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} \varphi(\Gamma_1)\, \varphi(\Gamma_2)\, K_{N_0}(\Gamma_1\Gamma_2)\, d\Gamma_1 d\Gamma_2 = \sum_{s=1}^{6} g_s k_s,$$

где

$$g_s = \frac{1}{[\Delta\Gamma'']^2} \int\limits_{\Delta\Gamma''}\int\limits_{\Delta\Gamma''} C_s(\Gamma_1''\Gamma_2'')\, d\Gamma_1'' d\Gamma_2'',\ \ \Delta\Gamma'' = \Delta F \Delta E$$

$$k_s = \frac{1}{\Delta T^2} \int\limits_0^{\Delta T}\int\limits_0^{\Delta T} K_s(t_1 t_2)\, dt_1 dt_2,$$

т. е. дисперсия будет конечной, конечным будет и среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_{\Phi_0} = \sqrt{D\Phi_0(\varphi)},$$

но оно будет непрерывно зависеть от характеристик измерительного прибора.

Среднее значение поля $< N_0(\Gamma) >$ находится из (11a) переходом к пределу с учетом преобразования от телесных углов к площадкам:

$$N_0(\mathbf{\Gamma}) = \lim_{\Delta\Gamma\to 0} \beta \left[\frac{1}{\Delta\Gamma} < n > p_{ij} f_0 \Delta t_\kappa \right] = \frac{1}{e} < i > b(\mathbf{\Gamma}''). \qquad (23)$$

Функция распределения вероятностей

Хотя распределение вероятностей поля $N_0(\vec{\Gamma})$ в каждой точке не существует, тем не менее можно говорить об этом в обобщенном смысле. Пусть $\Delta\Gamma$ — интервал в фазовом пространстве, по которому производится усреднение измерительным прибором $\varphi(\vec{\Gamma})$. Тогда от каждого импульса n_κ распределение γ-квантов в $\Delta\Gamma$ будет пуассоновским, оно будет пуассоновским и от ряда импульсов, укладывающихся во временный интервал усреднения ΔT, если параметры электронного потока (n, E_e, f) фиксированы. Так как в действительности эти параметры флуктуируют относительно своих средних значений, то пуассоновское распределение необходимо усреднить, т. е.

$$p(\Delta N) = \iiint\limits_0^\infty p(\Delta N/n;\ E_e;\ f)\, w(n;\ E_e;\ f)\, dn dE_e df, \qquad (24)$$

где

$p(\Delta N/n;\ E_e;\ f) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{< \Delta N_{nEf} >}{l!} e^{-<\Delta N_{nEf}>} \delta(l - \Delta N)$ — плотность вероятности пуассоновского распределения;

$w(n;\ E_e;\ f)$ — совместная плотность распределения параметров электронного потока.

Для бетатронов на средние энергии заряд, ускоряемый за цикл $n_\kappa \approx 10^{10}$ *эл*; если $\Delta\Gamma$ таково, что $< \Delta N >$ достаточно велико (скажем, $> 10^2$ квантов), а w сосредоточена около ($< n >$; E_0; f_0), то в (24) достаточно ограничиться одним членом разложения в ряд Эджворта, т. е. получить гауссовское распределение для ΔN. Но в этом случае и само поле $N_0(\mathbf{\Gamma}) = \frac{\Delta N}{\Delta \mathbf{\Gamma}}$ будет распределено нормально с параметрами, определенными выше. Принятием гауссовской формы распределения ограничиваются явно или неявно в большинстве практических расчетов.

Заключение

1. Случайная составляющая функции $N_0(\vec{\Gamma})$ распределения квантов в фазовом пространстве (т. е. за вычетом среднего значения $N_0(\vec{\Gamma}) \rangle$) является суммой двух компонент: а) компонента $N_0'(\Gamma)$ обусловлена флуктуациями электронного потока, полностью коррелирована на F и E для каждого t (этот факт используется в дифференциальных схемах); б) компонента $N_0''(\Gamma)$ обусловлена вероятностным характером радиации на мишени; является «неоднородным белым шумом» с интенсивностью

$$\lambda(\vec{\Gamma}) = \langle N_0(\vec{\Gamma}) \rangle$$

2. Ковариантная функция $K_{N_0}(\vec{\Gamma}_1 \vec{\Gamma}_2)$ имеет отделимую временную компоненту. Временная компонента $K_\varsigma(t_1 t_2)$ эффективно может быть определена экспериментально; пространственно-энергетическая компо-

нента ковариационной функции $C_s(\vec{\Gamma}_1'' \; \vec{\Gamma}_2'')$ может быть найдена расчетным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. Некоторые применения гармонического анализа. Вып. 4, ФМ, 1961.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. Наука, 1965.
3. В. М. Гольданский. Статистика отсчетов при регистрации ядерных излучений. Атомиздат, 1959.
4. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. ФМ, 1963.
5. С. В. Стародубцев, А. М. Романов. Взаимодействие γ-излучения с веществом. Наука, УзССР, Т, ч. 1, 1964.
6. У. Фано, М .Бергер, С. Спенсер. Перенос γ-излучения. Атомиздат, 1963.