ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 170 1969

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПЕРЕНОСА БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

А. А. ВОРОБЬЕВ, О. Б. ЕВДОКИМОВ

Научноприкладные задачи радиационной физики, космической техники, электронной терапии, дозиметрии, дефектоскопии с помощью электронных пучков, вторичной электронной эмиссии неизбежно сталкиваются с проблемой проникновения быстрых электронов. В этой связи вопросы теории переноса этих частиц в различных средах и материалах приобретают важные значения. Перед теорией ставится задача — вычислить функцию распределения электронов в пространстве, по энергиям и направлениям движения. Функция определяется из соответствующего кинетического уравнения при известных начальных и граничных условиях либо методом Монте-Карло. Решение общего кинетического уравнения Больцмана для быстрых электронов связано с большими математическими трудностями. Поэтому приходится вводить различного рода приближения ,что приводит к необходимости написания и решения приближенных уравнений переноса в соответствии с характером задачи. Связь этих уравнений с точным уравнением Больцмана обычно не обсуждается, что затрудняет оценку пределов применимости того или иного приближения. В данной статье рассматривается связь кинетических уравнений, применяемых при решении частных задач в теории переноса быстрых электронов с учетом принятых приближений, с интегродифференциальным уравнением Больцмана. Вопрос связи с интегральным уравнением Больцмана явится предметом другой статьи.

1. Интегродифференциальные уравнения переноса электронов

а. Общее уравнение. Перенос быстрых частиц, двигающихся со скоростью v, может быть описан с помощью следующего уравнения Больцмана [1]

$$\frac{\partial N(\bar{r}, v\Omega, t)}{\partial t} + v\Omega_{\nabla} N(r, v\Omega, t) + v\,\Sigma(v) N(r, v\Omega, t) =$$

$$= \int\limits_{v}^{v_0} \Sigma(v')\, v'\, dv'\, c(v') \int\limits_{4\pi} d\Omega' f(v'\Omega' \to v\Omega) N(r, v\Omega, t) + S(\bar{r}, v\Omega, t), \tag{1}$$

где обозначено:

$N(r, v\Omega, t)$ – функция распределения частиц по координатам r, скоростям v, направлениям движения Ω, в момент t,

$\Sigma(v)$ — сечение взаимодействия,

$f(v'\Omega' \to v\Omega)$ — плотность вероятности того, что частица двигающаяся со скоростью $v'\Omega'$, после столкновения будет иметь скорость $v\Omega$.

$c(v)$ — среднее число вторичных частиц того же сорта, образованных частицей со скоростью v в одном столкновении. В уравнении (1) предполагается, что сечение взаимодействия не зависит от времени, и запаздывающих частиц нет, а нестационарность обусловлена источником $S(r, v\Omega, t)$. Для такого случая в теории переноса электронов удобно пользоваться вместо времени длиной пройденного частицей пути R, связанного со временем и скоростью каждой частицы соотношениями:

$$R = \int_0^t v(t')\,dt' \quad dR = v(t)\,dt. \tag{2}$$

Если частица появилась в момент времени t_0, то нужно считать $v(t) = 0$ при $t < t_0$.

Уравнение (1) преобразуем с учетом присущих электронам особенностей, а именно, поскольку скорость релятивистских электронов должна быть определена с высокой точностью, то удобно перейти от скоростей к кинетическим энергиям T и внести функцию

$$v\,N(r, v\Omega, t) = P(r, T, \Omega, R). \tag{3}$$

Тогда вместо (1) имеем:

$$\frac{\partial P(r,T,\Omega,R)}{\partial R} + \Omega\nabla P(r, T, \Omega, R) + \Sigma(T)P(r, T, \Omega, R) =$$

$$= \int_T^{T_0} \Sigma(T')c(T')\,dT' \int_{4\pi} d\Omega'\,q(T',\Omega',\to T, \Omega)\,P(r, T, \Omega, R) + S,(r, T, \Omega)\,\delta(R)' \tag{4}$$

где

$$dv' f(v'\Omega' \to v\Omega) = dT'\,q(T', \Omega' \to T, \Omega).$$

$\delta(R)$—дельта—функция Дирака, учитывающая тот факт, что электроны источников имеют нулевой пробег.

Уравнение (4) является наиболее общим уравнением, описывающим перенос электронов в изотропной среде в стационарном случае без образования γ-квантов и дающим распределение электронов с учетом их пробегов и образования вторичных электронов. Для его решения необходимо знать граничные условия и вид ядра

$$\Sigma(T')\,c(T')\,q(T', \Omega' \to T, \Omega).$$

Точное выражение для этой функции не получено, так как движущийся в среде электрон взаимодействует одновременно с большим числом электронов и ядер. Поэтому вопрос о точном решении задачи проникновения электронов не может быть поставлен.

Практически отсутствие точного выражения для рассматриваемого ядра не является существенной трудностью в задаче расчета переноса электронов. Дело в том, что движущийся в веществе электрон теряет энергию почти исключительно при взаимодействии с атомными электронами, практически не отклоняясь. С другой стороны, отклонение электронов происходит за счет упругих столкновений с ядрами, с потерями энергии, практически равными нулю. Эти обстоятельства позволяют считать независимыми друг от друга акты, связанные с потерями энергии (неупругие столкновения, не приводящие к отклонению электронов) и столкновения с отклонениями (упругие столкновения с ядрами без потерь энергии). Тогда, учитывая, что образование вторичных электронов при упругих столкновениях с ядрами исключено, имеем:

$$c(T')\Sigma(T')q(T',\Omega'\to T,\Omega)\to c(T')\Sigma_i(T')q_i(T'\to T)\delta(\Omega'-\Omega)+ + \Sigma_s(T)\cdot q_s(T,\Omega'\to\Omega)\delta(T'-T),$$

где

$\Sigma_s(T)$ — сечение упругих столкновений,

$\Sigma_i(T)$ — сечение неупругих столкновений.

$q_s(T'\to T)$ и $q_i(T,\Omega\to\Omega)$ — соответствующие плотности вероятностей.

Тогда уравнение (1) переходит в уравнение (6):

$$\frac{\partial P(r,T,\Omega,R)}{\partial R}+\Omega\nabla P(r,T,\Omega,R)+\Sigma(T)P(r,T,\Omega,R)=$$

$$=S(r,T,\Omega)\delta(R)+\int_T^{T_0}dT'c(T')\Sigma_i(T')q_i(T'\to T)P(r,T',\Omega,R)+(\ )$$

$$\int_{4\pi}d\Omega'\Sigma_s(T)q_s(T,\Omega'\to\Omega)P(r,T,\Omega',R),$$

где

$$\Sigma(T)=\Sigma_i(T)+\Sigma_s(T). \tag{7}$$

Как будет видно из дальнейшего, уравнение (6) может быть положено в основу теории переноса быстрых электронов, если пренебречь размножением электронов за счет электронно-фотонных каскадов и предполагать среду изотропной. Из него следуют все уравнения, применяемые для решения частных и приближенных задач переноса электронов.

б. Уравнение для функции распределения электронов по углам и энергиям вдоль пробега. Если, например, электорон движется поперек тонкой фольги, его пробег в ней близок к ее толщине. В этом случае задача определения функции распределения сильно упрощается, так как можно исключить пространственную переменную $\bar{r}$ введением функции:

$$\Phi(T,\Omega,R)=\int_\infty drP(r,T,\Omega,R). \tag{8}$$

Уравнение для Φ идентично с уравнением (6), за исключением члена с градиентом, так как $P(r,T,\Omega,R)\to 0$ при r ∞, и получается из (6) путем интегрирования по всему пространству. Обозначим уравнение для Φ через (9). Функция Φ может быть измерена с помощью следовых камер.

в. Уравнение для спектра электронов в зависимости от пройденного пути. В работе [2] и др. рассматривается задача об определении энергетического спектра электронов после прохождения через фольгу. Если фольга тонкая, то пройденный путь приблизительно равен толщине фольги и тогда спектр электронов определится функцией

$$W(T,R)=\int_{4\pi}\Phi(T,\Omega,R)d\Omega. \tag{10}$$

Более точно, эта функция характеризует распределение электронов по энергиям в зависимости от пройденного пути и может быть измерена с помощью следовых детекторов. Уравнение для W (T, R) получается из (9) путем интегрирования по Ω

$$\frac{\partial W(T,R)}{\partial R} + \Sigma(T)\,W(T,\ R) = \int_{T}^{T_0} dT'\,c(T')\,q_i(T' \to T)\,W(R,T')\,\Sigma_i(T') + \int_{4\pi} p\Omega \int_{4\pi} d\Omega' \cdot \Sigma_s(T)\,q_s(T, \Omega' \to \Omega)\,\Phi(T, \Omega', R) + S(T)\,\delta(R) \tag{11}$$

Двойной интеграл в (11) легко преобразуется, если учесть, что для изотропной среды $q_s(\Omega' \to \Omega) = q_s(\Omega' \cdot \Omega) = q_s(\cos\Theta)$, где Θ — угол между векторами Ω' и Ω

$$2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\Theta\, q_s(T_1\cos\Theta) = 1. \tag{12}$$

Тогда двойной интеграл в (11) равен

$$\Sigma_s(T)\,W\,(R, T)$$

и, следовательно, из (11) с учетом (7) получаем:

$$\partial W/\partial R + \Sigma_i W = \int_{T}^{T_0} dT'\ c(T')\,\Sigma_i(T')\,q_i(T' \to T)\,W(R, T') + S(T)\,\delta(R). \tag{13}$$

Это и есть уравнение для $W(R, T)$.

г. Уравнение в задаче о диссипации энергии электронов решается в работе [3] и может быть получено из уравнения (13) путем интегрирования по R от 0 до ∞, если учесть что $W(R, T) = 0$ при $R = 0$, $R = \infty$:

$$y(T)\,\Sigma_i(T) = \int_{T}^{T_0} dT'\,c(T')\,\Sigma_i(T')\,q_i(T' \to T)\,y(T') + S(T), \tag{14}$$

где обозначено

$$y(T) = \int_0^{\infty} W(R, T)\,dR.$$

д. Уравнение для функции энергетического и углового распределения электронов в пространстве. Обычно в задачах переноса частиц представляет интерес распределение частиц по энергиям и углам в зависимости от положения в пространстве без учета их пробега, т. е. функция:

$$n(r, T, \Omega) = \int_0^{\infty} P(r, T, \Omega, R)\,dR.$$

Уравнение для $n(r, T, \Omega)$ получается путем интегрирования уравнения (*) по R от 0 до ∞.

$$\Omega\nabla\, n(r, T, \Omega) + \sum(T)\,n(r, T, \Omega) = S(r, T, \Omega) + \int_{T}^{T_0} dt' \sum\nolimits_i(T')\,c(T')\,n(r, T, \Omega)\,q_i(T' \to T) + \int_{4\pi} d\Omega' \sum\nolimits_s(T)\,q_s(T, \Omega' \to \Omega)\,n(r, T, \Omega). \tag{15}$$

Решение уравнения (15) представляет большие трудности, и, очевидно, поэтому в литературе оно, как и уравнение (4), не встречается.

Трудности в известной степени могут быть обойдены, если задачу рассмотреть в рамках приближения непрерывного замедления, в основе которого лежит предположение о малости величины теряемой в столкновении энергии в сравнении с самой энергией электрона. Тогда уравнение (15) может быть преобразовано, если ограничиться

$$n(r, T', \Omega) = n(r, T + \tau, \Omega) \cong n(r, T, \Omega) + \tau \frac{\partial n(r, T, \Omega)}{\partial T}. \quad (16)$$

Тогда первый интеграл правой части уравнения (15) приближенно равен

$$n(r, T, \Omega)\Sigma_i(T) + \frac{\partial n(r, T, \Omega)}{\partial T} \cdot \varkappa(T), \quad (17)$$

$$n(r, T, \Omega)\Omega_i(T) + \frac{\partial n(r, T, \Omega)}{\partial T} \cdot \varkappa(T), \quad (18)$$

где $\varkappa(T) = -\frac{dT}{\partial R}$ — удельные потери энергии (18) (размножение электронов не рассматриваем, т. е. $c(T) = 1$). Уравнение (15) в приближении непрерывного замедления принимает вид:

$$\frac{dT}{dR} \cdot \frac{\partial n(r, T, \Omega)}{\partial T} + \Omega\nabla n(r, T, \Omega) + \Sigma_s(T)\, n(r, T, \Omega) =$$
$$= \int_{4\pi} d\Omega' q_s(T, \Omega' \to \Omega)\Sigma_s(T)\, n(r, T, \Omega') + S(r, T, \Omega). \quad (19)$$

Так как между энергией электрона и его пробегом в приближении непрерывных потерь существует однозначная связь, то вместо энергии вводят в уравнение остаточный пробег R_0 и переходят к новой функции [4] $I(r, R_0, \Omega) = n(r, T, \Omega)$

$$-\frac{\partial I(r, R_0, \Omega)}{\partial R_0} + \Omega\nabla I(r, R_0, \Omega) + \Sigma_s \cdot I(r, R_0, \Omega) =$$
$$= \int_{4\pi} d\Omega' q_s(R_0, \Omega' \to \Omega) \Sigma_s \cdot I(r, R_0, \Omega') + S(r, R_0, \Omega). \quad (20)$$

е. Частичные задачи в приближении непрерывного замедления. В [4] и ряде других работ рассматривается угловое распределение частиц в зависимости от остаточного пробега, т. е. функция

$$g(R_0, \Omega) = \int dr\, I(r, R_0, \Omega).$$

Уравнение для g получается из (20) интегрированием по r и внешне совпадает с ним, кроме члена с градиентом, который обращается после интегрирования в нуль. При расчете многократного рассеяния в фольге обычно можно пренебречь зависимостью g_s и Σ_s от энергии и, следовательно, от R_0. Поэтому уравнение для функции углового распределения $U(r, \Omega)$ электронов после прохождения через фольгу можно получить, интегрируя (20) по R_0 от 0 до ∞:

$$\Omega\nabla U(r, \Omega) + \Sigma_s \cdot U(r, \Omega) = \Sigma_s \int_{4\pi} d\Omega' q_s(\Omega' \cdot \Omega)\, U(r, \Omega') + S, \quad (21)$$

где

$$U(r, \Omega) = \int_0^\infty I(r, R_0, \Omega)\, dR_0,$$

т. е. получили уравнение, обычно используемое для вычисления многократного рассеяния электронов в фольгах.

Таким образом, выше было показано, что все интегродифференциальные уравнения, используемые в расчетах по переносу быстрых электронов, следуют из уравнения Больцмана, а также выведены более полные уравнения и показано, как естественно получается уравнение в приближении непрерывного замедления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Дэвисон. Теория переноса нейтронов. Атомиздат, М., 1960.
2. Л. Д. Ландау. J. Phys., USSR, 8, 204, 1944.
3. Spencer L. V., Fano U. Phys. Rev., 93, 1954.
4. Lewis H. W. Phys. Rev., 78, 526, 1950.