

СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ УХОДЫ ПОПЛАВКОВОГО
ИНТЕГРИРУЮЩЕГО ГИРОСКОПА НА КАЧАЮЩЕМСЯ
ОСНОВАНИИ

А. М. МАЛЫШЕНКО

(Представлена научным семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

Введение

Поплавковые интегрирующие гироскопы (ПИГ), впервые предложенные доцентом МЭИ Л. И. Ткачевым в 1945 году, находят широкое применение в схемах пространственной стабилизации платформ таких устройств, как инерциальные системы навигации и управления подвижных объектов.

Известно, что угловые колебания основания ПИГ вызывают дополнительные (по сравнению с уходами на неподвижном основании) ухода гироскопа. При этом возможны ухода одного направления, наиболее нежелательные в гироскопических системах. Ниже исследуется зависимость скорости подобных уходов от параметров гироскопа и движения основания.

Уравнение движения ПИГ на качающемся основании и его общее решение

Для составления уравнения движения ПИГ свяжем жестко с основанием и с поплавком гироскопа (рис. 1) правые прямоугольные трехгранники осей $Oxyz$ и $OHPS$, исходящие из точки O симметрии гироскопа так, что оси y и P совпадают с осью вращения поплавка (осью прецессии), а ось H направлена по оси собственного вращения ротора гироскопа. Ориентация других осей видна из рис. 1.

Если полагать в дальнейшем центр симметрии O совпадающим с центром масс гироскопа, а главные оси эллипсоида инерции поплавка — с осями Резаля HPS , то движения ПИГ на подвижном основании с достаточной точностью могут описываться уравнением

$$A(\ddot{\varepsilon} + \dot{\Omega}_y) + H(\Omega_x \sin \varepsilon + \Omega_z \cos \varepsilon) = M_\varepsilon, \quad (2.1)$$

где ε — угол прецессии гироскопа;

H — собственный кинетический момент гироскопа;

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ — проекции абсолютной угловой скорости Ω основания на оси x, y, z ;

M_ε — момент внешних сил, действующих на поплавок гироскопа относительно оси прецессии P ;

A — суммарный момент инерции поплавка и ротора гироскопа относительно оси прецессии.

Момент внешних сил M_ε может быть записан в виде

$$M_\varepsilon = M_y - \mu \dot{\varepsilon} + M_B, \quad (2.2)$$

где M_y — момент управления, прикладываемый к гироскопу относительно оси прецессии;

μ — коэффициент вязкого трения, характеризующий момент вязкого трения между поплавком и корпусом ПИГ;

M_B — момент всех других (вредных) сил, действующих на гироскоп вокруг оси прецессии (моменты трения, небаланса, тяжения в датчике угла прецессии и т. п.).

При использовании ПИГ в качестве чувствительного элемента угловых колебаний платформы инерциальной системы угол прецес-

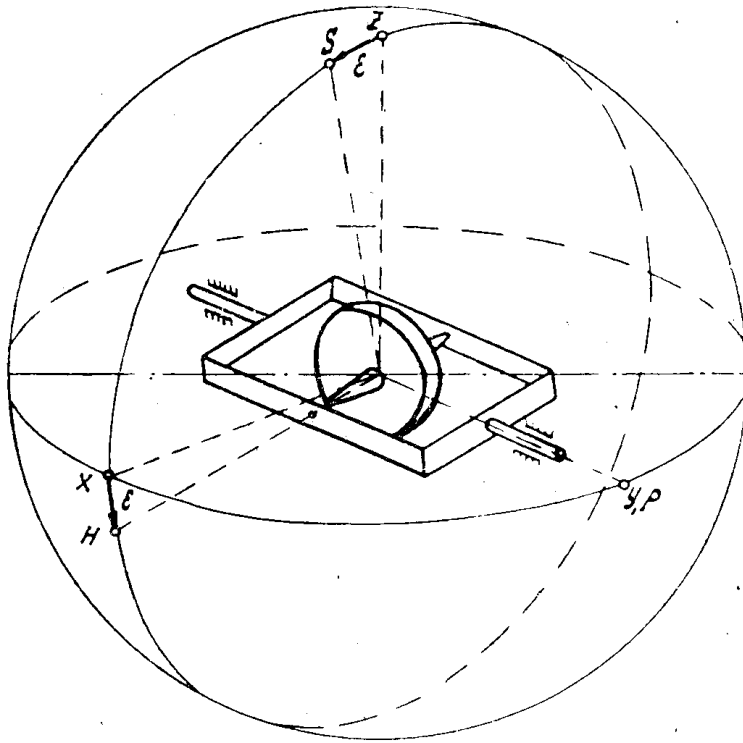


Рис. 1.

сии ϵ в процессе работы системы не превышает несколько угловых минут, поэтому можно принять

$$\sin \epsilon \cong \epsilon; \cos \epsilon \cong 1.$$

С учетом этих соотношений и (2.2) уравнение движения ПИГ принимает вид:

$$A\ddot{\epsilon} + \mu\dot{\epsilon} + H\Omega_x\epsilon = -H\Omega_z + M_y + M_B - A\dot{\Omega}_y, \quad (2.3)$$

или

$$T\ddot{\epsilon} + \dot{\epsilon} + \kappa\Omega_x\epsilon = -\kappa\Omega_z + \chi(M_y + M_B) - T\dot{\Omega}_y, \quad (2.4)$$

де

$$T = \frac{A}{\mu}, \quad (2.5)$$

$$\kappa = \frac{H}{\mu}, \quad (2.6)$$

T и κ — соответственно постоянная времени и статический коэффициент передачи гироскопа.

Постоянная времени T поплавковых интегрирующих гироскопов не превышает, как правило, тысячных долей секунды [1, 2], поэтому при исследовании влияния на ПИГ качаний основания в диапазоне частот, ограниченном сверху единицами через уравнение (2.4) с достаточной точностью может быть заменено усеченным уравнением:

$$\dot{\varepsilon} + \kappa \Omega_x \varepsilon = -\kappa \Omega_z + \chi (M_y + M_b) - T \dot{\Omega}_y. \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения относительно угла прецессии есть

$$\begin{aligned} \varepsilon = \exp \left(- \int_0^t \kappa \Omega_x dt \right) \left\{ \varepsilon_0 + \int_0^t \left[-\kappa \Omega_z + \right. \right. \\ \left. \left. + \chi (M_y + M_b) - T \dot{\Omega}_y \right] \cdot \exp \left(\int_0^t \kappa \Omega_x dt \right) \right\} dt, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где ε_0 — величина угла прецессии в момент $t = 0$.

В соответствии с предъявляемыми к ПИГ требованиями угловая скорость его прецессии должна быть равна

$$\dot{\varepsilon}_н = -\kappa \Omega_z + \chi M_y. \quad (2.9)$$

Разность между $\dot{\varepsilon}_н$ и действительной скоростью прецессии ПИГ, представляющая собой скорость ухода гироскопа относительно оси прецессии P , согласно (2.8) и (2.9) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\varepsilon}(t) = -\chi M_b + T \dot{\Omega}_y + \kappa \Omega_x \exp \left(- \int_0^t \kappa \Omega_x dt \right) \left\{ \varepsilon_0 + \right. \\ \left. + \int_0^t \left[-\kappa \Omega_z + \chi (M_y + M_b) - T \dot{\Omega}_y \right] \cdot \exp \left(\int_0^t \kappa \Omega_x dt \right) dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определение скорости ухода ПИГ в квадратурах по формуле (2.10) при гармоническом и случайном режимах колебания платформы не представляется возможным. По этой причине при анализе поведения поплавкового интегрирующего гироскопа на качающемся основании используют приближенные методы, например, метод последовательных подстановок [3], разложение в подынтегральном выражении решения уравнения движения ПИГ функции $\exp \left(\int_0^t \kappa \Omega_x dt \right)$ в ряд по функ-

циям Бесселя с последующим определением решения в квадратурах [1]. Эти методы используются лишь при гармоническом законе изменения угловой скорости $\Omega_x(t)$. Приведенное ниже решение отличается от вышеуказанных и позволяет использовать конечные результаты не только для гармонических, но и для случайных колебаний основания.

Для определения скорости ухода ПИГ при произвольном характере колебаний платформы преобразуем усеченное уравнение движения гироскопа (2.7) в интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = -\kappa \Omega_z(t) + \chi M_y(t) - T \dot{\Omega}_y(t) - \\ - \varepsilon_0 \kappa \Omega_x(t) - \kappa \Omega_x(t) \int_0^t \dot{\varepsilon}(t_1) dt_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

относящееся к классу линейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода [4].

Для отыскания решения уравнения (2.11) воспользуемся методом последовательных подстановок, наиболее удобным при решении задач подобного типа [5].

С целью сокращения записи введем обозначение

$$F(t) = -\kappa\Omega_z(t) + \chi[M_y(t) + M_b(t)] - T\dot{\Omega}_y(t) - \varepsilon_0\kappa\Omega_x(t) \quad (2.12)$$

и приведем уравнение (2.11) к виду:

$$\dot{\varepsilon}(t) = F(t) - \kappa\Omega_x(t) \int_0^t \dot{\varepsilon}(t_1) dt_1. \quad (2.13)$$

Скорость прецессии ПИГ в момент t_1 согласно (2.13) равна:

$$\dot{\varepsilon}(t_1) = F(t_1) - \kappa\Omega_x(t_1) \int_0^{t_1} \dot{\varepsilon}(t_2) dt_2. \quad (2.14)$$

Подставляя в (2.13) вместо $\dot{\varepsilon}(t_1)$ его значение (2.14), получим

$$\dot{\varepsilon}(t) = F(t) - \kappa\Omega_x(t) \int_0^t [F(t_1) - \kappa\Omega_x(t_1) \int_0^{t_1} \dot{\varepsilon}(t_2) dt_2] dt_1. \quad (2.15)$$

Если в (2.15) вместо $\dot{\varepsilon}(t_2)$ подставить выражение, аналогичное (2.14), и повторять в дальнейшем описанный процесс, то получим решение уравнения (2.13) в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда:

$$\dot{\varepsilon}(t) = F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t), \quad (2.16)$$

где

$$Q_n(t) = (-\kappa)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \Omega_x(t) \cdot \Omega_x(t_1) \cdot \dots \cdot \Omega_x(t_n) F(t_n) dt_n \dots dt_1. \quad (2.17)$$

• Скорость ухода поплавкового интегрирующего гироскопа при этом может быть выражена формулой

$$\Delta\varepsilon(t) = -\chi M_b(t) + T\dot{\Omega}_y(t) + \varepsilon_0\kappa\Omega_x(t) - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t). \quad (2.18)$$

Ниже определяются систематические уходы ПИГ при некоторых видах колебаний основания.

Уходы ПИГ при гармонических колебаниях основания

Определим уходы поплавкового интегрирующего гироскопа, когда проекции угловых скоростей

$$\Omega_i = \Omega_{im} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (3.1)$$

$$(i = x, y, z),$$

а момент вредных сил по оси прецессии

$$M_b = M_{b0} + M_{bm} \sin(\omega_M t + \varphi_M). \quad (3.2)$$

Здесь Ω_i — амплитудное значение проекции угловой скорости движения основания вокруг i оси ($i = x, y, z$);

ω_i, φ_i — круговая частота и начальная фаза колебаний основания вокруг i -ой оси;

$M_{в0}, M_{вm}$ — постоянная составляющая и амплитуда переменной составляющей момента вредных сил по оси прецессии;
 ω_M, φ_M — круговая частота и начальная фаза изменений момента по оси прецессии.

Будем полагать в дальнейшем момент управления M_y равным нулю, так как вызванные его отклонением от заданного значения M_y^* уходы ПИГ могут быть учтены за счет отнесения момента

$$\Delta M_y = M_y - M_y^*$$

к моментам вредных сил по оси прецессии.

При этих условиях скорость ухода ПИГ в первом приближении согласно (2.18) равна

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\varepsilon}_1(t) = & -\chi M_{в0} - \chi M_{вm} \sin(\omega_M t + \varphi_M) + \\ & + T \Omega_{ym} \cos(\omega_y t + \varphi_y) + \varepsilon_0 \kappa \Omega_{xm} \sin(\omega_x t + \varphi_x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя $\Delta \dot{\varepsilon}_1(t)$ в (2.18) и производя элементарные преобразования, получим величину скорости ухода ПИГ во втором приближении, равную

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\varepsilon}(t) = & -\chi M_{в0} - \chi M_{вm} \sin(\omega_M t + \varphi_M) + \kappa \chi M_{в0} \Omega_{xm} t \cdot \sin(\omega_x t + \varphi_x) - \\ & - N \kappa \Omega_{xm} \sin(\omega_x t + \varphi_x) + T \Omega_{ym} \cos(\omega_y t + \varphi_y) + \\ & + \varepsilon_0 \kappa \Omega_{xm} \sin(\omega_x t + \varphi_x) + \varepsilon_0 \frac{\kappa^2}{2\omega_x} \Omega_{xm} \sin 2(\omega_x t + \varphi_x) + \\ & + \frac{\kappa^2}{2\omega_z} \Omega_{xm} \Omega_{zm} \{ \sin [(\omega_x - \omega_z) t + \varphi_x - \varphi_z] + \sin [(\omega_x + \omega_z) t + \varphi_x + \varphi_z] \} - \\ & - \frac{\kappa \chi}{2\omega_M} M_{вm} \Omega_{xm} \{ \sin [(\omega_x - \omega_M) t + \varphi_x - \varphi_M] + \sin [(\omega_x + \omega_M) t + \varphi_x + \varphi_M] \} - \\ & - \frac{\kappa T}{2} \Omega_{xm} \Omega_{ym} \{ \cos [(\omega_x - \omega_y) t + \varphi_x - \varphi_y] - \cos [(\omega_x + \omega_y) t + \varphi_x + \varphi_y] \}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где обозначено

$$N = \frac{\kappa}{\omega_z} \Omega_{zm} \cos \varphi_z - \frac{\chi}{\omega_M} M_{вm} \cos \varphi_M - T \Omega_{ym} \sin \varphi_y + \varepsilon_0 \frac{\kappa}{\omega_x} \Omega_{xm} \cos \varphi_x. \quad (3.5)$$

При оценке уходов поплавкового интегрирующего гироскопа можно ограничиться вторым приближенным решением (3.4), так как знакопеременный ряд (2.18) быстро сходится. Это подтверждается достаточно точным совпадением результатов вычислений по формуле (3.4) и решения исходного уравнения движения ПИГ (2.4) на аналоговой вычислительной машине.

Наиболее неблагоприятным в инерциальных системах является систематический уход гироскопов. По этой причине определим режимы колебаний основания, при которых возможны подобные уходы ПИГ.

Согласно второму приближенному решению (3.4) скорость ухода ПИГ при различных значениях круговых частот колебаний основания и момента $M_{в}$ не имеет постоянной составляющей. Угловые колебания основания вокруг осей x, y, z вызывают при этом эффект, подобный биениям.

При равенстве круговой частоты ω_x изменений скорости Ω_x и одной из частот колебаний Ω_y, Ω_z или $M_{в}$ появляется дополнительная

постоянная составляющая скорости прецессии. Если предположить, что

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_M = \omega,$$

то поплавок интегрирующий гироскоп согласно (3.4) получит при работе скорость систематического ухода, равную

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\epsilon}_c(t) = & -\kappa M_{в0} + \frac{\kappa^2}{2\omega} \Omega_{xm} \Omega_{zm} \sin(\varphi_x - \varphi_z) - \\ & - \frac{\kappa\kappa}{2\omega} \Omega_{xm} M_{вm} \sin(\varphi_x - \varphi_M) - \frac{\kappa T}{2} \dot{\Omega}_{xm} \Omega_{ym} \cos(\varphi_x - \varphi_y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что наиболее неблагоприятными условиями работы ПИГ являются такие движения основания, когда

$$\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z - 90^\circ = \varphi_M + 90^\circ. \quad (3.7)$$

При этих условиях скорость систематического ухода достигает максимального значения:

$$\Delta \dot{\epsilon}_{cm}(t) = - \left(\kappa M_{в0} + \frac{\kappa^2}{2\omega} \Omega_{xm} \Omega_{zm} + \frac{\kappa\kappa}{2\omega} \Omega_{xm} M_{вm} + \frac{\kappa T}{2} \dot{\Omega}_{xm} \Omega_{ym} \right). \quad (3.8)$$

В частном случае, когда

$$\Omega_y = 0; M_B = 0,$$

полученное решение для скорости систематического ухода ПИГ с точностью до обозначений совпадает с решением Б. И. Назарова [1], если в последнем считать амплитуду угла колебаний основания вокруг оси x достаточно малой.

Уходы ПИГ при случайном характере колебаний основания

При случайных колебаниях основания, характерных для гиростабилизированных платформ, установленных на подвижных объектах, уравнение движения ПИГ (2.4) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение со случайным коэффициентом и случайной правой частью.

Для выявления возможности систематических уходов ПИГ при случайных колебаниях основания используем, как и в случае гармонических колебаний основания, усеченное уравнение движения гироскопа (2.7) и его решение (2.15). С этой целью определим математическое ожидание скорости ухода $\Delta \epsilon(t)$.

На основании известных соотношений теории случайных функций [6] математическое ожидание $m[\Delta \epsilon(t)]$ скорости ухода ПИГ можно записать согласно (2.15) в виде

$$\begin{aligned} m[\Delta \epsilon(t)] = & -\kappa m_{M_B}(t) + T \frac{d}{dt} [m_{\Omega_y}(t)] + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \times \\ & \times \left[\exp \left(- \int_0^t \kappa m_{\Omega_x}(t_1) dt_1 \right) \right] - \kappa^2 \int_0^t R_{\Omega_x \Omega_z}(t, t_1) dt_1 - \kappa^2 m_{\Omega_x}(t) \times \\ & \times \int_0^t m_{\Omega_z}(t_1) dt_1 + \kappa\kappa \int_0^t R_{\Omega_x M}(t, t_1) dt_1 + \kappa\kappa m_{\Omega_x}(t) \int_0^t m_M(t_1) dt_1 - \\ & - \kappa T \int_0^t R_{\Omega_x \dot{\Omega}_y}(t, t_1) dt_1 - \kappa T m_{\Omega_x}(t) \cdot m_{\Omega_y}(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $m_i(t)$ — математическое ожидание i -го случайного процесса ($i = \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, M_x, M$);

$R_{\Omega_x j}(t, t_1)$ — взаимная корреляционная функция случайных процессов $\Omega_x(t)$ и $j(t)$ ($j = \Omega_z, \dot{\Omega}_y, M$).

В частном случае, когда математические ожидания проекций угловой скорости основания на оси x, y, z и момента внешних сил по оси прецессии гироскопа тождественно равны нулю, математическое ожидание скорости систематического ухода ПИГ равно

$$m[\Delta\dot{\varepsilon}(t)] = -\kappa^2 \int_0^t R_{\Omega_x \Omega_z}(t, t_1) dt_1 + \kappa x \int_0^t R_{\Omega_x M}(t, t_1) dt_1 - \kappa T \int_0^t R_{\Omega_x \dot{\Omega}_y}(t, t_1) dt_1, \quad (4.2)$$

На основании (4.2) приходим к заключению, что даже при нулевых математических ожиданиях составляющих угловых скоростей $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ движения основания и момента M по оси прецессии, поплавковый интегрирующий гироскоп может иметь систематический уход. При этих условиях систематический уход ПИГ возникает за счет корреляционной связи между угловой скоростью $\Omega_x(t)$ основания и каким-либо из случайных процессов $\Omega_z(t), \dot{\Omega}_y(t)$ или $M(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Назаров. О погрешностях двухстепенного интегрирующего гироскопа, вызванных колебаниями основания, Известия вузов по разделу «Приборостроение», № 6, 1960.
2. С. С. Ривкин. Некоторые вопросы динамики интегрирующих гироскопов, Сборник докладов «Вопросы прикладной гироскопии», вып. 3, Судпромгиз, Л., 1962.
3. С. С. Арутюнов. О погрешностях двухстепенного интегрирующего гироскопа, вызванных угловыми колебаниями объекта, Известия вузов по разделу «Приборостроение», № 2, 1959.
4. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, М., 1957.
5. Л. Я. Ройтенберг. О движении гироскопического компаса при случайных перемещениях его точки опоры, Прикладная математика и механика, вып. 1, 1965.
6. В. С. Пугачев. Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1962.