

СОЛЕНОИД В НЕСОВЕРШЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

В. К. ЖУКОВ, В. Ю. СОСНИН

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

Метод вихревых токов с успехом можно применять для контроля концентрации двухкомпонентных растворов электролитов. Теоретически эта задача рассмотрена в ряде работ [1, 2]. Однако авторы этих работ ограничиваются только случаем, когда контролируемый раствор находится снаружи соленоида, и, кроме того, они при рассмотрении этого вопроса пренебрегают токами смещения в электролите.

Вихревые токи в растворе электролита в общем случае определяются как токами смещения, так и токами проводимости. Вследствие этого представляется возможным, контролируя изменения параметров соленоида, вызванных погружением его в раствор, тем самым контролировать электрическую проводимость и диэлектрическую проницаемость слабых растворов.

При однозначной зависимости между концентрацией и проводимостью двухкомпонентных растворов по величине проводимости можно судить о концентрации раствора.

Если раствор обтекает соленоид внутри и снаружи, то чувствительность соленоида к изменению параметров раствора будет более высокой по сравнению со случаем, когда раствор находится только снаружи соленоида.

Найдем зависимость полного сопротивления соленоида от параметров раствора, который со всех сторон обтекает соленоид и который можно рассматривать как несовершенный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ и удельной электропроводностью γ . С этой целью найдем решение волнового уравнения

$$\nabla^2 \vec{H} = -\omega^2 \mu_0 \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{H} \quad (1)$$

для внутренней и внешней областей соленоида (рис. 1).

В волновое уравнение входит комплексная диэлектрическая проницаемость раствора

$$\vec{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\gamma}{\omega} \quad (2)$$

Если длина соленоида во много раз больше его диаметра, то без существенной ошибки можно считать

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{I}_z \cdot H, \\ \vec{E} &= \vec{I}_\varphi \cdot E. \end{aligned} \quad (3)$$

Вследствие симметрии системы

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \dot{H}}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

С учетом упрощающих выражений (3) и (4) волновое уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}}{\partial r} + \kappa^2 \cdot \dot{H} = 0, \quad (5)$$

$$\kappa^2 = \omega^2 \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon. \quad (6)$$

Общим решением волнового уравнения во внутренней среде будет

$$\dot{H}_1 = \dot{A}_1 \cdot J_0(\kappa r) + \dot{B}_1 \cdot N_0(\kappa r).$$

а в наружной —

$$\dot{H}_2 = \dot{A}_2 \cdot J_0(\kappa r) + \dot{B}_2 \cdot N_0(\kappa r).$$

Из условия конечности $\dot{H}_1$ при $r = 0$ следует положить $\dot{B}_1 = 0$. Тогда

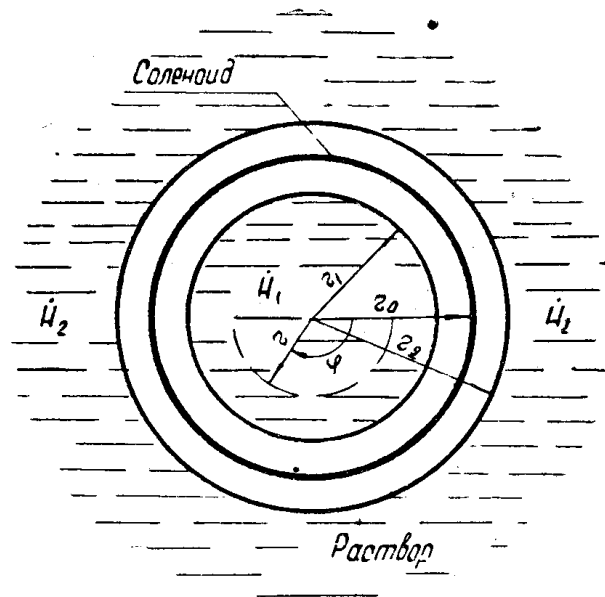


Рис. 1.

$$\dot{H}_1 = \dot{A}_1 \cdot J_0(\kappa r). \quad (7)$$

Чтобы при $r \rightarrow \infty$ в проводящей наружной среде $\dot{H}_2$ падало до нуля, необходимо принять $\dot{A}_2 = 0$, так как $J_0(\kappa r) \rightarrow \infty$ при комплексном κ и $r \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем

$$\dot{H}_2 = \dot{B}_2 \cdot N_0(\kappa r). \quad (8)$$

Будем считать, что диаметр соленоида много больше диаметра проволоки, из которой он намотан, вследствие чего промежуток между границами сред по сравнению с радиусом соленоида r_0 пренебрежимо мал, так что

$$r_2 - r_1 \approx 0.$$

При таком допущении напряженность электрического поля на внутренней границе наружной среды будет равна:

$$E_2 = \frac{e_{2.0}}{2\pi \cdot r_0}. \quad (9)$$

где $e_{2.0}$ — э. д. с. на граничном слое. Электродвижущая сила, индуцированная в граничном слое, определяется магнитным потоком $\Phi_{\text{вн.}}$, пронизывающим контур, образованный этим слоем:

$$e_{2.0} = -j\omega \cdot \Phi_{\text{вн.}} \quad (10)$$

Магнитный поток $\Phi_{\text{вн}}$ находим интегрированием

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{вн.}} &= \mu_0 \int_s \dot{H}_1 ds = \mu_0 \cdot \dot{A}_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} J_0(\kappa r) \cdot r \cdot dr = \\ &= 2\pi \cdot \mu_0 \cdot \dot{A}_1 \cdot \frac{r_0}{\kappa} J_0(\kappa r_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (10) и (11) определяем напряженность электрического поля

$$\dot{E}_{2.0} = -j\omega\mu_0 \cdot \dot{A}_1 \cdot \frac{1}{\kappa} J_0(\kappa r_0). \quad (12)$$

Из уравнения $\text{rot} \cdot \vec{H} = j\omega \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$ следует, что

$$\dot{E}_2 = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \dot{H}_2}{\partial r},$$

откуда после подстановки $\dot{H}_2$ из (8) получаем

$$\dot{E}_2 = \frac{\kappa}{j\omega \cdot \epsilon} \dot{B}_2 \cdot N_1(\kappa r). \quad (13)$$

На границе раздела при $r = r_2 \approx r_0$ напряженность электрического поля будет равна

$$\dot{E}_{2.0} = \frac{\kappa}{j\omega\epsilon} \cdot \dot{B}_2 \cdot N_1(\kappa r_0). \quad (14)$$

Приравнивая правые части выражений (12) и (14), получаем первое уравнение, необходимое для определения постоянных интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{B}_2$:

$$\dot{B}_2 \cdot N_1(\kappa r_0) = \dot{A}_1 \cdot J_1(\kappa r_0). \quad (15)$$

Из условия равенства напряженностей магнитного поля на границе внутренней среды $\dot{H}_{1.0} = \dot{H}_0 - \dot{H}_{2.0}$ находим другое уравнение, необходимое для определения $\dot{A}_1$ и $\dot{B}_2$:

$$\dot{A}_1 \cdot J_0(\kappa r_0) = \dot{H}_0 - \dot{B}_2 \cdot N_0(\kappa r_0). \quad (16)$$

В результате совместного решения уравнений (15) и (16) определяем постоянную интегрирования $\dot{A}_1$:

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{H}_0}{J_0(\kappa r_0) + J_1(\kappa r_0) \frac{N_0(\kappa r_0)}{N_1(\kappa r_0)}}. \quad (17)$$

Используя найденное значение постоянной интегрирования, вы-

ражение (11) для магнитного потока, пронизывающего соленоид, можно представить в виде

$$\dot{\Phi}_{\text{вн.}} = \dot{\Phi}_0 \cdot F(\kappa r_0), \quad (18)$$

где

$$F(\kappa r_0) = \frac{\frac{2}{\kappa r_0}}{\frac{J_0(\kappa r_0)}{J_1(\kappa r_0)} + \frac{N_0(\kappa r_0)}{N_1(\kappa r_0)}}, \quad (19)$$

$$\dot{\Phi}_0 = \pi \cdot r_0^2 \cdot \mu_0 \cdot \dot{H}_0. \quad (20)$$

Падение напряжения, образующееся на соленоиде при протекании по нему тока I_1 , определяется полным сопротивлением z соленоида и равно

$$U_c = I \cdot z = I \cdot R_0 + j \omega \cdot \varpi \cdot \dot{\Phi}_{\text{вн.}} \quad (21)$$

где R_0 — сопротивление соленоида на постоянном токе, а ϖ — его число витков.

На основании закона полного тока можно написать

$$\dot{H}_0 = \frac{I \cdot \varpi}{l}, \quad (22)$$

после чего из выражения (21) с учетом (18) и (22) определить полное сопротивление соленоида длиной l , погруженного в раствор

$$Z = R_0 + jX = R_0 + j \omega \cdot \varpi^2 \pi \cdot r_0^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{1}{l} F(\kappa r_0). \quad (23)$$

Сопротивление этого же соленоида в воздухе равно

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = R_0 + j \omega \cdot \varpi^2 \pi \cdot r_0^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{1}{l}. \quad (24)$$

Изменение полного сопротивления, обусловленное погружением соленоида в раствор

$$\Delta Z = j \omega \cdot \varpi^2 \cdot \pi r_0^2 \frac{\mu_0}{l} [F(\kappa r_0) - 1],$$

нормированной форме будет иметь вид:

$$\frac{\Delta Z}{X_0} = F(\kappa r_0) - 1. \quad (25)$$

Разделяя вещественную и мнимую части в выражении (25), получим

$$\frac{\Delta R}{X_0} = \text{Re} [F(\kappa r_0) - 1]. \quad (26)$$

$$\frac{\Delta X}{X_0} = \text{Im} [F(\kappa r_0) - 1].$$

С помощью формул (26) можно найти изменение активной и реактивной составляющих полного сопротивления соленоида при погружении его в раствор электролита. Анализ этих формул позволит выявить условия, при которых обеспечивается оптимальная чувствительность соленоида к параметрам контролируемого раствора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Шумиловский, Г. Г. Ярмольчук, В. П. Грабовецкий, М. А. Прусов. Метод вихревых токов для контроля производственных параметров, ИЛИМ, 1964.

2. А. А. Десова. Измерение концентрации двухкомпонентных растворов электролитов методом вихревых токов, Энциклопедия измерений, контроля, автоматизации, т. 3, 1964.