ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 171 1969

ШИРИНА СПЕКТРА ДЕЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

В. П. ШЕРСТОБИТОВ

(Представлена кафедрой математических и счетно-решающих приборов и устройств)

В вычислительных и автоматических системах широко применяются делительные устройства для осуществления операции деления над аналоговыми временными функциями. Имеется несколько способов выполнения этой операции, в которых деление получается с помощью множительных устройств [1]. С данной целью множительное устройство включается в цепь обратной связи операционного усилителя или снабжается схемой, позволяющей получить обратную временную функцию одной переменной. Наряду с этим имеются схемы перемножения, основанные на автоматическом изменении коэффициентов передачи двух и более каналов, которые в принципе допускают операцию деления без структурного дополнения вспомогательными схемами.

Следует заметить, что физические делительные устройства имеют бо́льшие динамические ограничения в сравнении с множительными устройствами, так как функция, моделирующая делитель, ограничивается снизу и сверху. Это связано с тем, что математическое деление на малую величину не имеет физического аналога, так как невозможно моделировать большие числа. Ниже будет показано, что полоса пропускания делительных устройств из-за указанной причины оказывается более узкой в сравнении с полосой пропускания множительных устройств.

Целью настоящей работы является определение критерия для оценки полосы пропускания делительных устройств или равносильно определение ширины спектра функции частного при известных ширинах спектров входных функций.

Академик А. А. Харкевич в работе [2] показал, что общая ширина спектра двух временных функций с ограниченными снизу и сверху спектрами не менее суммы и не более удвоенной суммы ширин спектров обоих сомножителей. Если нижние границы спектров сомножителей примыкают к нулевой частоте, то не трудно сделать вывод, что общая ширина спектра произведения двух временных функций со спектрами, начинающимися в области нулевых частот, равна сумме верхних частот сомножителей.

Очевидно, для делительных устройств можно воспользоваться этим выводом, если найти ширину спектра обратной величины переменной, моделирующей делитель. При этом необходимо учесть замечание об ограниченности динамического диапазона делителя.

Пусть операция деления, получаемая любым из упомянутых способов, записывается в виде:

$$U_z = U_0 \frac{U_x}{U_y}. \tag{1}$$

Здесь U_x и U_y — временные функции, моделирующие соответственно делимое и делитель, U_0 — постоянный коэффициент, а U_z—выходная функция, моделирующая частное от деления двух функций

Операция (1) подобна операции перемножения, если величину $\frac{1}{U_y}$ заменить функцией U'_y, т. е.

$$U_z = U_0 \cdot U_x \cdot U'_y. \tag{2}$$

Для оценки частотных свойств делительного устройства целесообразно делитель представить в виде:

$$U_y = U_{y0} + U_{ym} \cos \omega t. \tag{3}$$

U_{y0} — некоторый постоянный уровень,

U_{ym} — амплитуда переменной составляющей, изменяющейся с частотой ω во времени t.

Минимальное значение делителя в данном случае определяется

$$U_{y\,\text{мин}} = U_{y0} - U_{ym}. \tag{4}$$

Таким образом, достаточно рассмотреть ширину спектра обратной функции U'_y с учетом ее записи через U_y в виде (3).

$$U'_y = \frac{1}{U_y} = \frac{1}{U_{y0} + U_{ym} \cdot \cos \omega t}. \tag{5}$$

По-видимому, общая ширина спектра обратной функции определяется верхней частотой ω переменной U_y.

Функцию (5) можно разложить в ряд Фурье по гармоническим составляющим, кратных частоте ω. Для этого воспользуемся формулами книги [3] для четных функций $f(x)$, так как функция U'_y является четной.

Ряд Фурье в данном случае записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos nx, \tag{6}$$

если $f(x) = f(-x)$, где

a_0 — постоянная составляющая,

a_n — амплитуда гармонической составляющей с номером n,

x — независимая переменная.

Амплитуды гармоник находятся по формуле:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx. \tag{7}$$

В соответствии с (6) и (7) запишем

$$U'_y = U'_{y0} + \sum_{n=1}^{+\infty} U'_{yn} \cdot \cos n \omega t. \tag{8}$$

При определении ширины спектра постоянная составляющая U'_{y0} нас не интересует, поэтому находим в общем виде величину U'_{yn}, для чего воспользуемся вычисленным определенным интегралом в книге [4].

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx\, dx}{1 + a\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^n. \tag{9}$$

при $[a^2 < 1]$.

В данном случае вместо x следует поставить ωt, а коэффициент $[a]$ определить выражением

$$a = \frac{U_{\text{у}m}}{U_{\text{у}0}}. \tag{10}$$

Так как нас не интересуют знаки амплитуд гармоник, то можно выражение в скобках (9) умножить на (-1). Таким образом, модуль $U'_{\text{у}n}$ вычисляется

$$U'_{\text{у}n} = \frac{2}{U_{\text{у}0}} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^n. \tag{11}$$

Спектр обратной функции является бесконечным и с целью его ограничения допускаем определенную относительную погрешность δ.

$$\delta = \frac{U_{\text{у}n}}{U'_{\text{у макс}}} = U'_{\text{у}n}\cdot U_{\text{у мин}}. \tag{12}$$

Подставляя (4) в (12) и учитывая (10), получим

$$\delta = \frac{2(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^n. \tag{13}$$

Исходя из минимально допустимой погрешности δ и максимальной величины $[a]$, следует найти номер гармоники, на которой можно ограничить спектр обратной функции.

$$n = \lg\frac{\delta\cdot\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)} \Big| \lg\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right). \tag{14}$$

Полученное значение n необходимо округлить до ближайшего большего целого значения $n_{\text{н}}$.

$$n_{\text{н}} \geqslant n. \tag{15}$$

Если ширину спектра обратной функции обозначить через Ω, то она определится:

$$\Omega = n_{\text{н}}\cdot\omega. \tag{16}$$

Полная ширина спектра деления Ω_∂ при равных ширинах спектров U_x и $U_{\text{у}}$ определяется выражением:

$$\Omega_\partial = (1 + n_{\text{н}})\,\omega. \tag{17}$$

Таким образом, при заданной общей ширине спектра частного полосе пропускания) Ω_∂ ширина спектра делителя значительно сокращается (в $n_{\text{н}}$ раз). Указанные обстоятельства следует учитывать при проектировании делительных устройств на заданную точность. В качестве иллюстрации приводятся численные примеры:

При	$\delta = 1\%$ и	$a = 0{,}9$	получается	$n = 8{,}2$	$n_{\text{н}} = 9$,
„	$\delta = 0{,}1\%$	$a = 0{,}9$	„	$n = 13{,}1$	$n_{\text{н}} = 14$,
„	$\delta = 1\%$	$a = 0{,}99$	„	$n = 34{,}7$	$n_{\text{н}} = 35$,
„	$\delta = 0{,}1\%$	$a = 0{,}99$	„	$n = 51{,}0$	$n_{\text{н}} = 51$.

Выводы

1. Полоса пропускания делительных устройств в сравнени с полосой пропускания множительных устройств значительно уже, так как для выполнения операции деления с высокой точностью необходимо пропускать большое количество гармоник делителя.

2. При уменьшении минимального уровня делителя $U_{y_{мин}}$ (увеличении a) полоса пропускания делительного устройства также значительно сужается. Таким образом, полоса пропускания определяется не только верхней частотой делителя, но и его величиной.

3. В связи с тем, что для делителя требуется некоторый минимальный уровень, ниже которого изменение его величины не допускается, возникает трудность в учете знака делителя. Это вызывает необходимость для делителя сохранять постоянный знак или менять его с большой скоростью (скачком) до минимального уровня другого знака.

4. Делитель в форме выражения (3) может использоваться при испытании конкретных схем делительных устройств.

5. Номер гармоники n по формуле (14) служит критерием для оценки полосы пропускания делительных устройств. Если частота ω является верхней частотой делителя, то $n\omega$ будет максимально возможной шириной спектра обратной функции при заданной погрешности δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Смолов, А. Н. Лебедев и др. Вычислительные машины непрерывного действия. Высшая школа, 1964.
2. А. А. Харкевич. Спектры и анализ, Гостехиздат, 1957.
3. П. И. Романовский. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. Физматгиз, 1961.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.