ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 172 1967

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ЗАЩИТЫ И АВАРИЙНЫХ РЕЖИМОВ НА НАДЕЖНОСТЬ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

А. С. ГИТМАН, Б. А. ИТКИН, Э. К. СТРЕЛЬБИЦКИЙ

(Рекомендована научным семинаром кафедр электрических машин и общей электротехники)

Доля отказов асинхронных электродвигателей по вине защиты составляет $15 \div 25\%$. Количественную оценку и влияние отдельных характеристик защиты аварийных потоков на эксплуатационную надежность электродвигателей целесообразно исследовать с помощью математических моделей [1].

В зависимости от поставленной задачи и имеющихся исходных данных возможно применение различных моделей. Предлагаемая модель позволяет оценивать влияние коротких замыканий на износ изоляции машины и ее надежность.

При построении модели принимается допущение, что износ изоляции Δr_i при аварийном режиме i не зависит от влияния предыдущих коротких замыканий и перегрузок. Отказ k-го двигателя наступает после исчерпывания его ресурса изоляции R_k

$$\sum_i \Delta r_i \geqslant R_k \quad (i = 1, 2...; \quad k = 1, 2...). \tag{1}$$

Введем в рассмотрение предельную температуру в обмотке статора двигателя при аварийном режиме ϑ (за время $t_{пр}$), после достижения которой машина выходит из строя. Аварийность парка двигателей по вине защиты, когда время срабатывания не превышает $t_{пр}$, обозначим через A'. Аварийность при срабатывании за время, превышающее $t_{пр}$ (несрабатывание защиты или отсутствие ее соответствует $t_{пр} = \infty$), обозначим A''. Общая аварийность согласно теоремы сложения вероятностей.

$$A = A' + A'' - A'A''. \tag{2}$$

Поток аварий неодинаково сказывается на двигателях с различными ресурсами изоляции. На основании испытаний на срок службы можно считать распределение начальных ресурсов парка асинхронных двигателей нормальным. В интегральной форме закон распределения ресурса имеет вид:

$$P(r, \bar{r}, \sigma_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_r} \int_0^r e^{-\frac{(r-\bar{r})^2}{2\sigma_r^2}} dr = F\left(\frac{r-\bar{r}}{\sigma_r}\right), \tag{3}$$

где $F(x)$ — интегральная функция Лапласа.

Предположим, что имеется оценка среднего износа при данных параметрах защиты. Тогда можно исчислять ресурс изоляции двигателей числом аварий, которые они могут выдерживать:

$$n_i = \frac{r_i}{\Delta r}. \qquad (4)$$

Выражение (3) при этом принимает вид

$$P(n, \bar{n}, \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \int_0^n e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma_n^2}} dn = F\left(\frac{n-\bar{n}}{\sigma_n}\right), \qquad (5)$$

где $\bar{n} = \frac{\bar{r}}{\Delta r}$; $\sigma_n = \frac{\sigma_r}{\Delta_r}$.

И вероятность того, что двигатель рассматриваемого парка выдержал не менее $n-1$, но не более n аварийных режимов будет

$$F\Big|_{n-1}^{n} = F\left(\frac{n-\bar{n}}{\sigma_n}\right) - F\left(\frac{n-1-\bar{n}}{\sigma_n}\right); \; (n = 1,2...). \qquad (6)$$

Можно считать, что величина $F\Big|_{n-1}^{n}$ определяет долю парка двигателей, для которых n аварийных режимов приведет к выходу из строя. Условия вероятности того, что приход ровно n аварийных режимов приведет к аварии двигателей на участке $SS_{n-1,\,n}$ определяется формулой.

$$P_{\lambda, n\ (m \leqslant n)} = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}}{\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}} = \frac{\frac{\lambda^n}{n!}}{\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{\lambda^m}{m!}}. \qquad (7)$$

Доля отказавшихся двигателей по вине защиты на участке S_{n-1n}. будет равна

$$P(\lambda) = \frac{\frac{\lambda^n}{n!}}{\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{\lambda^m}{m!}} F\Big|_{n-1}^{n}, \qquad (9)$$

где λ — параметр пуассоновского потока аварийных режимов. Суммируя все участки, получим общую аварийность при срабатывании защиты за время, меньшее $t_{пр}$

$$A' = P(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda^n}{n!}}{\sum\limits_{m=0}^{n} \frac{\lambda^m}{m!}} \cdot F\Big|_{n-1}^{n}. \qquad (10)$$

Нами рассчитаны значения функции (10) для различных значений λ, n и σ_n.

Определим аварийность двигателей по вине защиты при срабатывании за время, превышающее $t_{пр}$. Допустим, что известна вероятность события

$$p\,(t \geqslant t_{пр}) = p''. \qquad (11)$$

для данного типа защиты. Тогда аварийность A″ при среднем значении потока аварий λ определяется по формуле [2]

$$A'' = 1 - (1 - p'')^{\lambda}. \qquad (12)$$

Для оценки износа изоляции при аварийном режиме необходимо знать плотность распределения времени срабатывания защиты. Защиту надо понимать в широком смысле слова, т. е. учитывать не только характеристики защитной аппаратуры, но и действия оператора. На основании работ [3, 4] распределение времени отключения двигателя оператором при аварийном режиме подчиняется закону Релея

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_p}}. \qquad (13)$$

Распределение времени отключения двигателя защитной аппаратурой при определенном виде короткого замыкания подчиняется усеченному нормальному закону с параметрами $\bar{t}$ и $\sigma_н$ [4]. Нормирующим множителем в большинстве случаев можно пренебречь

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_н} \int_0^t e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_н^2}} dt = F\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_н}\right). \qquad (14)$$

Так как отключение двигателя оператором или защитной аппаратурой является независимыми событиями, то вероятность отключения двигателя за время t определим из выражения

$$P(t) = 1 - \left[1 - F\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_н}\right)\right]\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}}\right)\right] = 1 - F\left(\frac{\bar{t}-t}{\sigma_н}\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}}. \qquad (15)$$

Из (15) определим вероятность события $p(t \geqslant t_{пр})$

$$P(t \geqslant t_{пр}) = 1 - P(t < t_{пр}) = F\left(\frac{\bar{t}-t_{пр}}{\sigma_н}\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}} \qquad (16)$$

Беря производную от функции (15) по t, найдем плотность распределения времени отключения двигателя защитой при аварийном режиме

$$f(t) = p'(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_н} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_p^2}} + \frac{t}{\sigma_p^2} F\left(\frac{\bar{t}-t}{\sigma_н}\right)\right]. \qquad (17)$$

Для количественной оценки аварийности по вине защиты необходимо знать плотность распределения износа изоляции $\varphi(V)$. Определение $\varphi(V)$ аналитически представляет значительные трудности. Менее точный, но более простой путь заключается в нахождении начальных моментов $\nu_к$ и установления с их помощью подходящего закона распределения износа. Предварительно выведем функцию износа изоляции при нагревании. Согласно [7] износ изоляции за период времени t определяется по формуле

$$V(\vartheta) = \int_0^t \exp\left[b(\vartheta - \vartheta_{доп})\right] dt, \qquad (18)$$

где b — коэффициент, зависящий от класса изоляции;
ϑ — температура изоляции;
$\vartheta_{доп}$ — допустимая температура изоляции для данного класса изоляции.

Значение ϑ для рассматриваемого случая короткого замыкания находится по формуле [6]

$$\vartheta_{кз} = (T_V - at)t + \vartheta_{нач}, \tag{19}$$

где T_V — начальная скорость нарастания температуры в обмотке статора при коротком замыкании;

a — постоянная, зависящая от типа двигателя;

$\vartheta_{нач}$ — начальная температура машины.

Подставляя (19) в (18), после ряда преобразований получаем

$$V_1(\vartheta) = e^{-в\left(\vartheta_{нач} - \vartheta_{доп} + \frac{T_V^2}{4a}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{ab}} \left[F(\beta t - \alpha) - F(-\alpha) \right], \tag{20}$$

$$\text{где} \quad \beta = \sqrt{2a} \cdot b; \alpha = \frac{\sqrt{b} T_V}{\sqrt{2a}}.$$

Функция износа изоляции при остывании $V_2(\vartheta)$ в соответствии с [8]

$$V_2(\vartheta) = \frac{T}{b\Delta\Theta_{кз}} \exp b(\vartheta_{нач} - \vartheta_{доп}) \left[\exp b\Delta\Theta_{кз} + 4\exp\frac{b\Delta\Theta_{кз}}{2} - 5 \right], \tag{21}$$

где T — постоянная времени обмотки при охлаждении,

$\Delta\Theta_{кз}$ — превышение температуры короткого замыкания над начальной температурой.

Подставляя (19) в (21), получим окончательно

$$V_2(\vartheta) = \frac{T}{b(T_V t - at^2)} \exp b(\vartheta_{нач} - \vartheta_{доп}) [\exp b(T_V t - at^2) +$$

$$+ 4\exp\frac{b(T_V t - at^2)}{2} - 5]. \tag{22}$$

Начальные моменты функций износа при нагревании и остывании можно вычислить по формулам

$$\upsilon_к[v_1(\vartheta)] = \int_0^{t_{пр}} [v_1(\vartheta_2)]^к f(t)dt \tag{23}$$

$$\upsilon_к[v_2(\vartheta)] = \int_0^{t_{пр}} [v_2(\vartheta_2)]^к f(t)dt, \tag{24}$$

где функция $f(t)$ определяется по (17).

При вычислении суммарного износа необходимо учитывать наличие корреляционной связи между износами при нагревании и остывании. Обозначив через $V(\vartheta)$ суммарный износ, для первого начального момента получим

$$\nu[V(\vartheta)] = \nu_1[V_1(\vartheta)] + \nu_2[V_2(\vartheta)], \tag{25}$$

как математическое ожидание суммы случайных величин. Второй начальный момент для функции $V(\vartheta)$ найдем из выражения $\nu_2[V(\vartheta)] = M[V(\vartheta)^2]$ и окончательно

$$\nu_2[V(\vartheta)] = \nu_2[V_1(\vartheta)] + 2\nu_{12}[V(\vartheta)] + \nu_2[V_2(\vartheta)], \tag{26}$$

где ν_{12} — смешанный начальный момент

$$\nu_{12}[V(\vartheta)] = M[V_1(\vartheta)V_2(\vartheta)] = \int_0^{t_{пр}} V_1(\vartheta)V_2(\vartheta)f(t)dt. \tag{27}$$

Проведенные нами вычисления первых четырех начальных и смешанных моментов функций износа при нагревании и остывании для наиболее распространенного четырехполюсного двигателя при различных параметрах защиты показали, что износ изоляции как при нагревании, так и при остывании подчиняются закону Вейбулла.

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^m}{x_0}}. \tag{28}$$

В приложении дается пример расчета.

При использовании математической модели влияния защиты на эксплуатационную надежность асинхронных двигателей для практических расчетов можно сделать некоторые упрощения:

1. Ограничиться учетом износа изоляции только при остывании.
2. Производить вычисление только первых двух начальных моментов.

Полученная математическая модель позволяет проанализировать влияние системы защиты двигателя на его эксплуатационную надежность для различных характеристик защиты и аварийных режимов.

Приложение

Пример расчета влияния загрубленной защиты асинхронных двигателей на их надежность при следующих параметрах: $\sigma_p = 16$ сек.; $t_н = 50$ сек.; $\sigma_н = 25$ сек.; $\lambda = 4$; $\vartheta_{нач} = 40°$ C; $t_{пр} = 59$ сек.

1. Из предварительно рассчитаных таблиц находим начальные и смешанные моменты износа изоляции:

$\nu_1[V_1(\vartheta)] = 15{,}58$ час. $\qquad \nu_1[V_2(\vartheta)] = 56{,}93$ час.

$\nu_2[V_1(\vartheta)] = 0{,}8136 \cdot 10^5$ час.^{2} $\qquad \nu_2[V_2(\vartheta)] = 0{,}8786 \cdot 10^6$ час.^{2}

$\nu_3[V_1(\vartheta)] = 0{,}8334 \cdot 10^9$ час.^{3} $\qquad \nu_3[V_2(\vartheta)] = 0{,}2785 \cdot 10^{11}$ час.^{3}

$\nu_4[V_1(\vartheta)] = 0{,}10441 \cdot 10^{14}$ час.^{4} $\qquad \nu_4[V_2(\vartheta)] = 0{,}1088 \cdot 10^{16}$ час.^{4}

$\nu_{12}[V_1(\vartheta)\, V_2(\vartheta)] = 0{,}2671 \cdot 10^6$ час.^{2}

2. Найдем параметры m и x_0 закона Вейбулла для износа при нагревании и остывании:

а. При нагревании $\nu_2 : \nu_1^2 = 0{,}8136 \cdot 10^5 : 15{,}58 = 336$.

$$m = 0{,}1975$$

Определим параметр x_0

$$x_0 = \left[\frac{\nu_1}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}\right]^m = \left[\frac{15{,}58}{\Gamma\left(\frac{1}{0{,}192}+1\right)}\right]^{0{,}192} = 0{,}63.$$

3-й и 4-й начальные моменты

$$\nu_3 = x_0^{\frac{3}{m}}\, \Gamma\left(\frac{3}{m}+1\right) = 0{,}63^{\frac{3}{0{,}192}}\, \Gamma\left(\frac{3}{0{,}192}+1\right) = 0{,}589 \cdot 10^{10},$$

$$\nu_4 = x_0^{\frac{4}{m}}\, \Gamma\left(\frac{4}{m}+1\right) = 0{,}63^{\frac{4}{0{,}192}}\, \Gamma\left(\frac{4}{0{,}192}+1\right) = 1{,}83 \cdot 10^{14}.$$

Совпадение 3-го и 4-го моментов достаточно хорошее.

б. При остывании $\qquad \dfrac{\nu_2}{\nu_1^2} = \dfrac{0{,}8786 \cdot 10^6}{56{,}53^2} = 274.$

$$m = 0{,}1975$$

$$x_0 = \left[\frac{56{,}53}{\Gamma\left(\frac{1}{0{,}1975}+1\right)}\right]^{0{,}1975} = 0{,}845; \quad \nu_3 = 0{,}845^{\frac{3}{0{,}1975}}\,\Gamma\left(\frac{3}{0{,}1975}+1\right) =$$

$$= 0{,}164 \cdot 10^{11},$$

$$\nu_4 = 0{,}845^{\frac{4}{0{,}1975}} \cdot \Gamma\left(\frac{4}{0{,}1975}+1\right) = 0{,}159 \cdot 10^{16}.$$

Совпадение 3-го и 4-го моментов также хорошее. Найдем верхние доверительные границы износа с доверительной вероятностью 0,995. В случае износа только при остывании

$$x = (5{,}3 \cdot x_0)^{\frac{1}{m}} = (5{,}3 \cdot 0{,}845)^{\frac{1}{0{,}1975}} = 2130 \text{ час.}$$

При учете совместного износа по (25) и (26)

$\nu_1[V(\vartheta)] = 56{,}53 + 15{,}58 = 72{,}11$ час.

$\nu_2[V(\vartheta)] = 0{,}8786 \cdot 10^6 + 0{,}8136 \cdot 10^5 + 20{,}2671 \cdot 10^6 = 1{,}4991 \cdot 10^6$

$\nu_1 : \nu_2 = 287$, $m = 0{,}196$

$$x_0 = \left[\frac{72{,}11}{\frac{1}{0{,}196}+1}\right]^{0{,}196} = 0{,}873;$$

$$\Delta r = x = (5{,}3 \cdot x_0)^{\frac{1}{m}} = (5{,}3 \cdot 0{,}873)^{\frac{1}{0{,}196}} = 2190.$$

В данном случае поправка на износ при нагревании несущественна. Пересчитаем параметры ресурса

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}}{\Delta r} = \frac{13000}{2190} = 5{,}94; \qquad \sigma_н = \frac{\sigma}{\Delta r} = \frac{2500}{2190} = 1{,}14.$$

Для округленных значений $n = 6$ и $\sigma_н = 1$. $A' = 0{,}1001$. Определим вероятность срабатывания защиты за время

$$t \geqslant t_{пр} \text{ по (16) } p'' = F\left(\frac{50-59}{25}\right) e^{-\frac{59^2}{2 \cdot 16^2}} = 0{,}402 \cdot 10^{-3}$$

и аварийность A'' по (12)

$A'' = 1 - (1 - 0{,}402 \cdot 10^{-3})^4 \approx 0{,}161 \cdot 10^{-2}$

Общая аварийность по (2)

$$A = 0{,}1001 + 0{,}00161 - 0{,}1001 \cdot 0{,}00161 = 10{,}16\,\%.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Иткин, Э. К. Стрельбицкий. О влиянии защиты на эксплуатационную надежность асинхронных двигателей, Изв. ТПИ, т. 160, 1966.
2. Е. С. Вентцель. Введение в исследование операций, Изд-во «Советское радио», 1964.
3. Ю. В. Чуев и др. Основы исследования операций в военной технике, Изд-во «Советское радио», 1965.
4. Б. А. Иткин, Э. К. Стрельбицкий. Исследование влияния аварийных режимов и защиты на надежность асинхронных двигателей, Изв. ТПИ, т. 172, 1967.
5. Я. Б. Шор. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, Изд-во «Советское радио», 1962.
6. Б. А. Иткин, Э. К. Стрельбицкий. О скорости нарастания температуры при аварийных режимах и законах охлаждения двигателей серии АО2, Изв. ТПИ, т. 162, 1967.
7. Г. Готтер. Нагревание и охлаждение электрических машин, ГЭИ, 1961.
8. И. А. Сыромятников. Режимы работы асинхронных и синхронных электродвигателей, ГЭИ, 1963.