

## О ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТОЙ СДВИГ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ, В. И. МАКСАК

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Во многих технологических задачах теории пластичности встречается деформированное состояние, которое называют простым сдвигом. Деформация простого сдвига имеет место при резании металлов, пробивании отверстий, отдельных видах штамповки и в ряде других технологических операций.

В простейшем случае простой сдвиг можно реализовать при кручении тонкостенной трубки. Характерным для данного вида деформации является непрерывный поворот осей тензора напряжений относительно материальных частиц тела, т. е. создаются условия сложного нагружения.

Результаты сопоставления экспериментальных кривых растяжения и кручения показывают некоторое их расхождение. При малых деформациях это расхождение незначительно и находится в пределах погрешности опыта. Так, в опытах [1] по растяжению и кручению трубчатых образцов из стали 3 кривая течения при кручении, взятая в координатах  $\sigma_i - e_i$ , лежит несколько ниже, чем при растяжении, а в опытах [2] с образцами из стали 20 — несколько выше.

При больших деформациях невозможно получить кривые растяжения и кручения при однородном напряженном состоянии. Поэтому были предприняты попытки проанализировать напряженное состояние в шейке растянутого образца [3] и при кручении сплошного цилиндра [4]. При этом оказалось, что в координатах  $\sigma_i - e_i$  кривая при кручении располагается значительно ниже, чем при растяжении. Однако построение этих кривых сделано с пересчетом неоднородного напряженного и деформированного состояний, что неизбежно связано с некоторыми погрешностями.

Ниже излагается попытка качественного объяснения характера и величины отклонений кривых течения при растяжении и кручении.

Деформация простого сдвига определяется следующими соотношениями между перемещениями [5]:

$$u_1 = \gamma \cdot y, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad (1)$$

где  $u_i$  — компоненты перемещения,

$\gamma$  — коэффициент пропорциональности (сдвиг).

Для описания деформированного состояния при малых деформациях можно использовать девять параметров, являющихся линейными комбинациями производных перемещений [6].

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

Геометрический смысл величин  $e_{ij}$  ясен. Величины  $\omega_{ij}$  пропорциональны повороту бесконечно малого объема, окружающего точку, в которой они определены. Сам поворот бесконечно малого объема относительно осей  $x, y$  выражается:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \psi_x &= \frac{\omega_x}{\sqrt{(1+e_{yy})(1+e_{zz}) - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2}}, \\ \operatorname{tg} \psi_y &= \frac{\omega_y}{\sqrt{(1+e_{xx})(1+e_{zz}) - \frac{1}{4}\gamma_{xz}^2}}, \\ \operatorname{tg} \psi_z &= \frac{\omega_z}{\sqrt{(1+e_{xx})(1+e_{yy}) - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}}.\end{aligned}\quad (3)$$

Применительно к простому сдвигу из параметров (2) только два не будут равны нулю

$$\gamma_{xy} = \gamma; \quad \omega_z = -\frac{\gamma}{2}.\quad (4)$$

Бесконечно малые элементы, согласно (3), получают поворот

$$\operatorname{tg} \psi_z = -\frac{\gamma}{\sqrt{4-\gamma^2}}.\quad (5)$$

В работе [7] дан приближенный закон связи напряжений и деформаций, который в векторной форме может быть записан следующим образом:

$$|d\bar{\mathcal{E}}^p| = k(|\bar{p}| - |\bar{p}_s|)|d\bar{T}| + \Phi'(|\bar{p}|)|d\bar{N}|,\quad (6)$$

где

$$|\bar{\mathcal{E}}| = \sqrt{\frac{3}{2}} e_i; \quad |\bar{p}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i,$$

$k$  — коэффициент пропорциональности, постоянный для данного материала,

$\Phi(|\bar{p}|)$  — функция, определяемая из опыта на растяжение. Величина  $|d\bar{T}|$  может быть определена

$$|d\bar{T}| = |\bar{p}| d\psi,\quad (7)$$

где

$$d\psi = \frac{d\gamma}{\sqrt{4-\gamma^2}}\quad (8)$$

получено дифференцированием (5). Величина  $|d\bar{N}|$  равна  $|d\bar{p}|$  — приращению вектора напряжений, поэтому (6) получит вид

$$|d\bar{\mathcal{E}}^p| = k(|\bar{p}| - |\bar{p}_s|)|\bar{p}| d\psi + [\Phi(|\bar{p}|) - \Phi(|\bar{p}_s|)]|d\bar{p}|.\quad (9)$$

После интегрирования (9) имеем:

$$|\bar{\mathcal{E}}^p| = k \int_{|\bar{p}_s|}^{|\bar{p}|} (|\bar{p}| - |\bar{p}_s|)|\bar{p}| d\psi + [\Phi(|\bar{p}|) - \Phi(|\bar{p}_s|)]|\bar{p}|.\quad (10)$$

Второе слагаемое определяет пластическую деформацию, которая получилась бы в результате простого нагружения. Первое слагаемое

дает значение пластической деформации, появившейся в результате поворота материальных частиц. Поэтому кривая течения при кручении будет располагаться ниже кривой при растяжении. Порядок их отношения и будет зависеть от величины первого слагаемого.

Для малых деформаций в (8) величиной  $\gamma^2$  можно пренебречь. Так как  $d\gamma = |d\bar{\epsilon}^p|/\sqrt{2}$ , то заменяя  $|d\bar{\epsilon}^p|$  через  $\Phi'(|\bar{p}|)|d\bar{p}|$ , (8) можно переписать следующим образом

$$d\gamma = \frac{d\gamma}{2} = \frac{|d\bar{\epsilon}^p|}{2\sqrt{2}} = \frac{\Phi'(|\bar{p}|)|d\bar{p}|}{2\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Обозначая первое слагаемое в (10) через  $|\bar{\epsilon}_\phi^p|$ , с учетом (11) его можно переписать в виде

$$|\bar{\epsilon}_\phi^p| = \frac{k}{2\sqrt{2}} \int_{|\bar{p}_s|}^{|\bar{p}|} (|\bar{p}| - |\bar{p}_s|) |\bar{p}| \Phi'(|\bar{p}|) |d\bar{p}|. \quad (12)$$

По известной кривой при растяжении  $|\bar{\epsilon}^p| = \Phi(|\bar{p}|)$  значение интеграла (12) можно определить численными методами или, аппроксимируя  $\Phi(|\bar{p}|)$ , например степенной функцией, непосредственно интегрированием

$$|\bar{\epsilon}^p| = \Phi(|\bar{p}|) = B \cdot |\bar{p}|^\beta. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12) и интегрируя, получим

$$|\bar{\epsilon}_\phi^p| = \frac{B\beta k}{2\sqrt{2}(\beta+1)(\beta+2)} [(\beta+1)|\bar{p}|^{\beta+2} - (\beta+2)|\bar{p}_s||\bar{p}|^{\beta+1} + |\bar{p}_s|^2]. \quad (14)$$

Для стали 45 [7]  $B \approx 1,2 \cdot 10^{-8}$ ;  $\beta \approx 3,9$ ;  $k = 2,86 \cdot 10^{-4}$ ;  $|\bar{p}_s| = 29,4 \text{ кг/мм}^2$ . Для последней экспериментальной точки  $|\bar{p}| = 53,8 \text{ кг/мм}^2$ . Подставляя эти данные в (14), можно рассчитать величину дополнительной пластической деформации, которая получилась бы при кручении трубчатого образца из этого материала. Оказывается,  $|\bar{\epsilon}_\phi^p| \approx 0,0019$ , что соответствует интенсивности деформаций  $e_i \approx 0,00155$ . Значению  $|\bar{p}| = 53,8 \text{ кг/мм}^2$  соответствует деформация  $e_i \approx 8\%$ . При таком же значении  $|\bar{p}|$  при кручении деформации будут больше на 0,16%, что составляет около половины упругой деформации, и кривые растяжения и кручения будут практически совпадать. По напряжениям эти кривые будут отличаться еще меньше.

При больших деформациях все выражения усложняются и в (12) интегрирование не удастся провести до конца. Поэтому представляется целесообразным проанализировать качественно, хотя бы в первом приближении, порядок расхождения кривых растяжения и кручения при больших деформациях, т. е. порядок величины дополнительной пластической деформации, которая возникает в результате поворота частиц при простом сдвиге.

Результаты экспериментов [8] по сложному нагружению с постоянной интенсивностью напряжений при больших деформациях показали, что приращение пластических деформаций на участке сложного нагружения мало по сравнению с предварительной деформацией. Так, при кручении образца [8] до значения  $\sigma_i = 83 \text{ кг/мм}^2$  он получил сдвиг около 0,83, что соответствует повороту материальных частиц относительно вектора напряжений на угол  $\psi \approx 25^\circ$ . Последующее сложное нагружение  $\sigma_i = \text{Const} = 83 \text{ кг/мм}^2$  вызвало поворот вектора напряжений относительно частиц на  $90^\circ$  и приращение пластической деформации

порядка 0,4%. Поэтому можно предполагать, что на первом этапе нагружения при простом сдвиге поворот вектора напряжений на  $25^\circ$  вызвал дополнительную деформацию не более чем 0,4%. Это значение дополнительной деформации будет мало отличать кривые течения при растяжении и кручении при больших деформациях.

Для проверки этих предположений проведены следующие эксперименты. На основе метода исследования больших деформаций [9] получены экспериментальные кривые течения при чистом кручении в координатах  $\sigma_i - e_i$  для стали 3, ШХ15, ЭЯ1Т и латуни по данным испытания трех пар сплошных образцов для каждого материала и кривые течения при сжатии трех цилиндрических образцов каждого материала. На рис. 1 в координатах истинных напряжений и деформаций светлыми кружками нанесены результаты испытаний при кручении, а темными — средние значения данных трех образцов при сжатии. Видно, что для каждого материала все экспериментальные точки ложатся весьма близко к одной кривой.

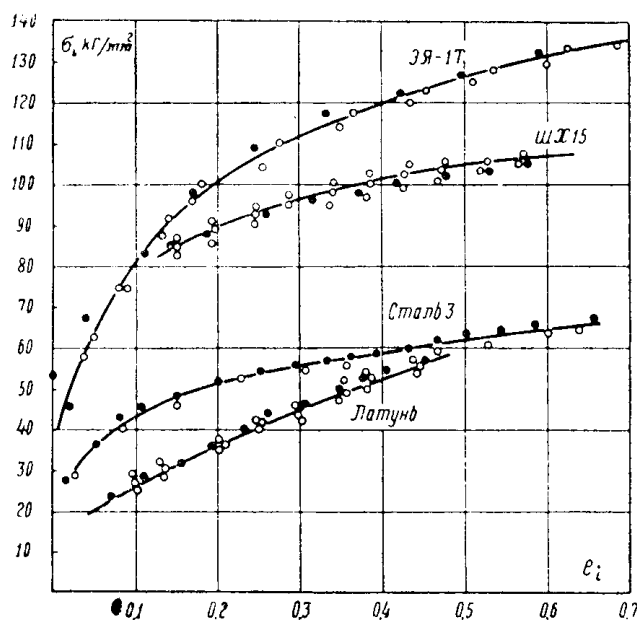


Рис. 1

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

Деформирование простой сдвиг является сложным нагружением с поворотом осей тензора напряжений.

Поэтому принципиально диаграммы кручения и растяжения — сжатия не могут совпадать, однако их отклонения по деформациям в соответствии с установленными ранее закономерностями приращения пластической деформации при повороте осей [7, 8, 9] настолько малы, что лежат в пределах погрешностей опыта.

С достаточной степенью точности можно отметить, что как для малых, так и для больших деформаций при растяжении — сжатии и кручении изотропных металлов кривые течения в координатах  $\sigma_i - e_i$  совпадают.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Дошинский. К основам теории упруго-пластической деформации. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Томск. 1958.
  2. А. М. Жуков. Пластические деформации стали при сложном нагружении. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1954.
  3. Н. Н. Давиденков, Н. И. Спиридонова. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца. Заводская лаборатория, № 6, 1945.
  4. Н. Н. Давиденков. Определение напряжений при пластическом кручении. Заводская лаборатория, № 6, 1948.
  5. А. Надаи. Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ, 1954.
  6. В. В. Новожилов. Теория упругости. Судпромгиз. 1958.
  7. В. И. Максак. Пластическая деформация стали при сложном нагружении. Изв. ТПИ, т. 139, 1966.
  8. В. И. Максак, Г. А. Дошинский. Исследование больших пластических деформаций при сложном нагружении. Изв. ТПИ, настоящий сборник.
  9. В. И. Максак, Г. А. Дошинский. Методика и исследование больших пластических деформаций при простом нагружении. Изв. ТПИ, настоящий сборник.
- 

