ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 109 1960

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО СЕЧЕНИЮ МЕЖДУ ЗЕРНАМИ ТЕПЛА, ПЕРЕДАВАЕМОГО В СУХОМ СЫПУЧЕМ ЗЕРНИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

А. С. ЛЯЛИКОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

Расчет коэффициента теплопроводности λ сыпучего зернистого материала основывается обычно на рассмотрении передачи тепла в элементарной типичной ячейке зернистого материала. В качестве наиболее общего вида представим структуру зернистого материала такой, какой она показана на рис. 1. Зерна материала имеют неправильную форму. Каждое зерно занимает положение устойчивого равновесия, опираясь на три нижележащих зерна. Места касания их — контакты — могут быть в виде точек и площадок, причем в пределах площадок возможно наличие зазоров, обусловливаемых микрошероховатостью поверхности зерен. Пространства между зернами заполнены газовой средой. Элементарную типичную ячейку такого материала можно представить в виде куба *abcd*, сторона которого равна среднему размеру зерна. В нее входят части соприкасающихся зерен и соответствующие пространства, заполненные газом. Средняя пористость элементарной ячейки равна общей пористости материала.

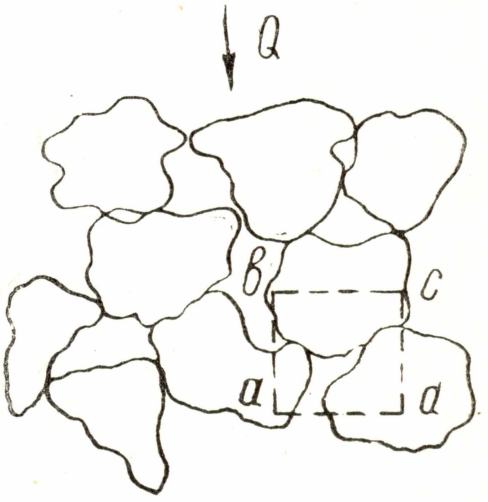

Рис. 1.

Одной из особенностей зернистого материала является наличие соприкосновений (контактов) между зернами, влияние которых на коэффициент теплопроводности должно быть учтено при расчете. Поэтому при разработке метода теоретического расчета λ важно выяснить типичный характер контактов между зернами и установить, какая доля от всего передаваемого ячейкой тепла приходится непосредственно на контакт, на близлежащие зоны и остальные участки сечения, то есть установить распределение передаваемого тепла по сечению и влияние на него характера контактирования.

Здесь мы не будем пытаться установить типичный характер контактирования, а поставим задачу оценить роль мест соприкосновения в тепловом процессе зернистого материала при различных случаях контакта.

Для получения качественной картины явления и облегчения использования аппарата математики рассмотрим распределение передаваемого тепла по сечению ячейки, пользуясь представлениями о „фиктивном“ слое, частицы которого одинаковы по размеру, имеют упорядоченную укладку и правильную, например, шаровую форму. Ограничимся рассмотрением одного из контактов, входящих в элементарную ячейку, так как явления в остальных будут иметь тот же характер.

А. Случай, когда между зернами имеется плоский контакт

Два шаровых зерна соприкасаются по круговой площадке, радиус которой равен r_0 (рис. 2). Эта площадка может являться результатом

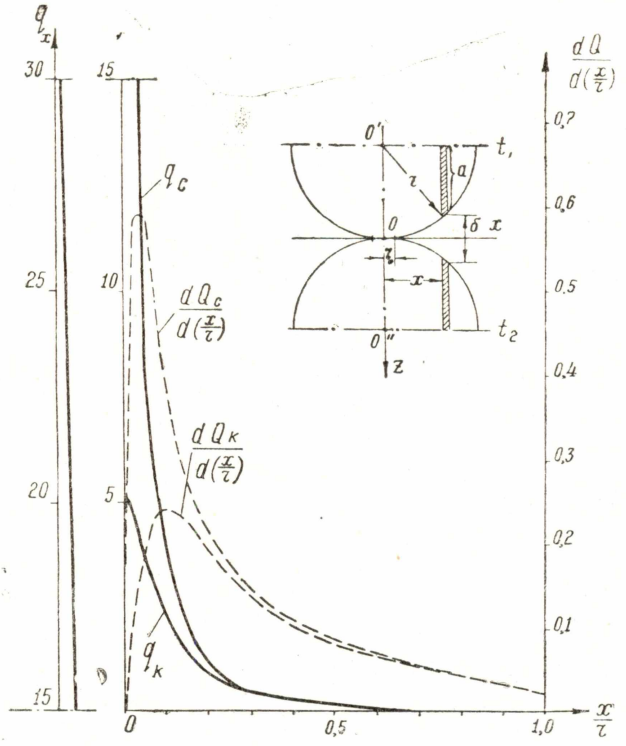

Рис. 2.

деформации шаров от внешних нагрузок на слой или от веса вышележащих слоев материала. Пусть горизонтальным плоскостям, проходящим через точки O' и O'', соответствуют температуры t_1 и t_2. Пространство между зернами заполнено газообразной средой с коэффициентом теплопроводности $\lambda_г$; для материала зерен он равен $\lambda_м$.

Тепловые потоки по сечению

При имеющемся перепаде температур $(t_1 - t_2) = \Delta t$ тепловой поток q_x в сечении $dxdy$ зависит от термического сопротивления R_x, меняющегося с изменением координаты x. Допускаем, что изотерми-

ческие плоскости параллельны оси x. Тогда тепловые потоки на участке от $x=0$ до $x=r_0$:

$$q'_x=\frac{\Delta t}{R_x}=\frac{\Delta t}{\frac{2r}{\lambda_м}}, \qquad q'_x=\frac{\lambda_м\cdot\Delta t}{2r}; \tag{а}$$

на участке от $x=r_0$ до $x=r$:

$$q''_x=\frac{\Delta t}{R_x}=\frac{\Delta t}{\frac{2a}{\lambda_м}+\frac{\delta}{\lambda_г}}=\frac{\Delta t}{\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\lambda_м}+\frac{2(r-\sqrt{r^2-x^2})}{\lambda_г}}$$

или

$$q''_x=\frac{\Delta t}{2r\left[\frac{1}{\lambda_г}+\left(\frac{1}{\lambda_м}-\frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]}. \tag{б}$$

Производя замену $\delta=2(r-\sqrt{r^2-x^2})$, мы не учитываем некоторое смещение контуров полушаров вследствие деформации в контакте. При выяснении количественных характеристик допустимость такой подстановки требует доказательства. В данном случае, как это выяснится в дальнейшем, замена $\delta=2(r-\sqrt{r^2-x^2})$, соответствующая предположению о точечном контакте, позволяет получить качественно правильное представление, что и является нашей ближайшей задачей.

Общий множитель $\frac{\Delta t}{2r}$ в уравнениях ($а$) и ($б$) есть величина, пропорциональная тепловому потоку. В условиях стационарного потока и заданного зернистого материала $\frac{\Delta t}{2r}$ есть величина постоянная, которую можно обозначить через C_1. Тогда ($а$) и ($б$) перепишем в виде

$$q'_x=C_1\lambda_м=\text{const}, \tag{1}$$

$$q''_x=C_1\frac{1}{\frac{1}{\lambda_г}+\left(\frac{1}{\lambda_м}-\frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}. \tag{2}$$

Выражения (1) и (2) характеризуют изменение тепловых потоков по относительной координате.

Тепло, передаваемое через сечение между двумя зернами, и его распределение по сечению

В плоскости xy полная площадь, через которую проходит тепло от одного зерна к другому, равна площади круга с радиусом r_0.

Тепло dQ_x, проходящее в единицу времени через кольцевую площадку сечения dS_x, можно записать:

$$dQ_x=\frac{\Delta t\,dS_x}{R_x}. \tag{в}$$

На участке от $x=0$ до $x=r_o$

$$dQ_x = \frac{\Delta t . 2\pi . x . d x}{\frac{2r}{\lambda_м}} = \frac{\lambda_м \Delta t . 2\pi . x\, dx}{2r}. \qquad (г)$$

Аналогично для участка от $x=r_o$ до $x=r$

$$dQ''_x = \frac{\Delta t . 2\pi x . dx}{\frac{2a}{\lambda_м} + \frac{\delta}{\lambda_г}} = \frac{\Delta t . \pi . x . dx}{r\left[\frac{1}{\lambda_г} + \left(\frac{1}{\lambda_м} - \frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]}. \qquad (д)$$

Уравнения (*г*) и (*д*) можно переписать в виде:

$$\frac{dQ'_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)} = \Delta t\, \pi\, r\, \lambda_м \left(\frac{x}{r}\right)\Bigg|_{\frac{x}{r}=0}^{\frac{x}{r}=\frac{r_0}{r}}, \qquad (е)$$

$$\frac{dQ''_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)} = \Delta t . \pi . r \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\frac{1}{\lambda_г} + \left(\frac{1}{\lambda_м} - \frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}. \qquad (ж)$$

Полученные производные представляют уравнения распределения тепла по относительной координате для рассматриваемого случая.

Произведение $\Delta t\, \pi\, r$, являющееся множителем в уравнениях (*е*) и (*ж*), может рассматриваться как

$$\Delta t\, \pi\, r = \frac{\Delta t . 2\pi . r^2}{2r} = 2C_1 . S_0,$$

где $S_0 = \pi r^2$ — полная площадь сечения теплового потока между зернами. Величина $2C_1 S_0$ есть, так же, как и C_1, величина, пропорциональная тепловому потоку. Обозначим $2C_1 S_0 = C_2$.

Тогда уравнения распределения тепла по относительной координате для случая касания зерен по площадке окончательно запишутся:

$$\frac{dQ'_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)} = C_2 \lambda_м \cdot \left(\frac{x}{r}\right)\Bigg|_{\frac{x}{r}=0}^{\frac{x}{r}=\frac{r_0}{r}}, \qquad (3)$$

$$\frac{dQ''_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)} = C_2 \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\frac{1}{\lambda_г} + \left(\frac{1}{\lambda_м} - \frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}. \qquad (4)$$

Б. Случай, когда между зернами имеется точечный контакт

В отличие от предыдущего случая при точечном соприкосновении отсутствует участок от $x=0$ до $x=r_o$ с линейным законом измене-

ния тепловых потоков и передаваемого тепла. Следовательно, тепловые потоки определяются соотношением

$$q_x = C_1 \frac{1}{\frac{1}{\lambda_г} + \left(\frac{1}{\lambda_м} - \frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}. \tag{5}$$

Распределение передаваемого тепла также описывается одним уравнением, действительным от $x=0$ до $x=r$:

$$\frac{dQ_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)} = C_2 \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\frac{1}{\lambda_г} + \left(\frac{1}{\lambda_м} - \frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}. \tag{6}$$

В. Случай, когда между зернами имеется зазор (соприкосновения нет)

Пусть зерна разделены зазором, величина которого по оси $o'o''$ вна δ_0 (рис. 3).

В этом случае тепловые потоки по сечению выражаются:

$$q_x = \frac{\Delta t}{R_x} = \frac{\Delta t}{\frac{2a}{\lambda_м} + \frac{\delta}{\lambda_г} + \frac{\delta_0}{\lambda_г}}$$

или

$$q_x = C_1 \frac{1}{\frac{1}{\lambda_г} + \frac{\delta_0 . 1}{d . \lambda_г} + \left(\frac{1}{\lambda_м} - \frac{1}{\lambda_г}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}, \tag{7}$$

где $d = 2r$.

Те же рассуждения, что и в случаях *А* и *Б*, приводят к следующему уравнению распределения передаваемого тепла:

$$\frac{dQ_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)} = C_2 \frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\frac{1}{\lambda_г} + \frac{\delta_0 . 1}{d . \lambda_г} + \left(\frac{1}{\lambda_м} - \frac{1}{\lambda_м}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) видно, что при наличии между зернами зазора δ_0 тепловые потоки q_x и передаваемое тепло Q_x зависят, кроме прочих факторов, от относительной величины зазора $\left(\frac{\delta_0}{d}\right)$.

Полученные уравнения (1)—(8) позволяют анализировать характер изменения тепловых потоков и распределение передаваемого тепла по относительной координате на примере конкретных материалов при различном характере контакта *А*, *Б* и *В*.

Для того, чтобы наиболее полно охватить диапазон материалов с различной теплопроводностью зерен, нами произведены вычисления величин q_x и $\frac{dQ_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)}$ для зернистого материала с зернами из хоро-

шо проводящего тепло материала — стали ($\lambda_м = 30$ *ккал/м час°*) и из слабо проводящего — кварца ($\lambda_м = 5{,}2$ *ккал/м час°*). Теплопроводность воздуха принята $\lambda_г = 0{,}022$. Численные значения постоянных C_1 и C_2 нас не интересовали, так как при графическом построении рассматри-

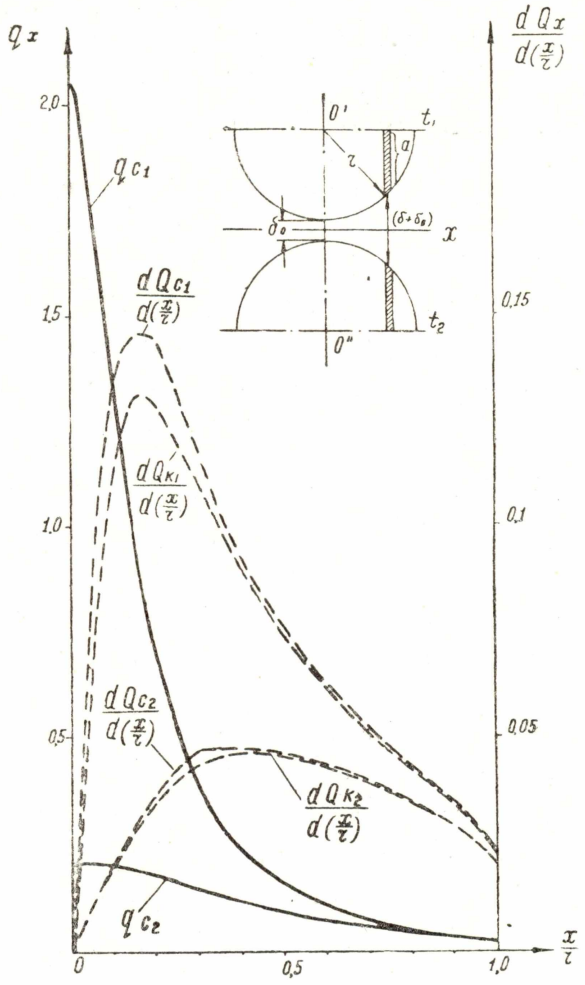

Рис. 3.

ваемых зависимостей они влияют только на масштаб графика и не меняют характера функций. Поэтому для упрощения можно принять $C_1 = 1$ и $C_2 = 1$. Результаты вычислений для случаев *А*, *Б* и *В* (последний для двух значений $\frac{\delta_0}{d} = 0{,}01$ и $\frac{\delta_0}{d} = 0{,}1$) приведены на рис. 2, 3 и 4.

Как выяснилось, в случае *Б* тепловые потоки и распределение тепла отличаются от *А* тем, что на весьма ограниченном участке от $x=0$ до $x=r_0$ линейный характер функции заменяется криволинейным с большим радиусом кривизны, поэтому вычисления для случая *Б* сделаны только для зернистого материала из стали. При построении кривых, характеризующих изменение тепловых потоков и распределение передаваемого тепла, оказалось, что кривые для случая *А* и *Б* практически совпадают, поэтому кривые для случая *Б* не приводятся.

При вычислении входящего в (3) и (4) отношения $\frac{r_0}{r}$ использована связь между силой, деформацией, механическими свойствами

материала и размером шара $\left[\frac{2}{\text{с.}353}\right]$, которую можно преобразовать для случая шаров одинакового диаметра и свойств к виду

$$r_0 = 0{,}712 \sqrt[3]{\frac{p_0 . d(1-\sigma^2)}{E}}, \tag{9}$$

где p_0 — усилие в контакте;
$d = 2r$ — диаметр зерна;
E — модуль упругости материала зерна;
r_0 — радиус площадки, образованной в результате деформации;
σ — коэффициент Пуассона.

В уравнение (9) входит сила p_0, деформирующая шар. Рассмотрением тетраэдрической укладки (три точки контакта для каждого шара) она найдена нами в зависимости от размера зерна и полного давления в слое P_z и выражается

$$P_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2(\sqrt{24}+\sqrt{6})} . d^2 . P_z = 0{,}353\, d^2 . P_z.$$

Подставляя это в (9), получаем:

$$\frac{r_0}{r} = 2 . 0{,}712 \sqrt[3]{\frac{0{,}353\, P_z (1-\sigma^2)}{E}}. \tag{10}$$

Приняв для стали $E = 2{,}1 . 10^6 \frac{кг}{см^2} = 2{,}1 . 10^{10} \frac{кг}{м^2}$,

$$\sigma = 0{,}3, \quad \gamma_м = 7900 \frac{кг}{м^3}$$

и толщину вышележащего слоя $z = 0{,}202$ *м*, при тетраэдрической укладке с пористостью $m = 0{,}259$ будем иметь:

$$\gamma = (1-m)\gamma_м = 5850 \frac{кг}{м^3}.,$$

$$P_z = \gamma . z = 1727 \frac{кг}{м^2}.$$

С помощью (10) получаем:

$$\frac{r_0}{r} = 6{,}23 . 10^{-3}.$$

Вычисления $\frac{r_0}{r}$ для кварца аналогичны.

Значения $\frac{x}{r}$, соответствующие максимуму кривой распределения передаваемого тепла (когда последний затруднительно выявить при графическом построении этой функции), определялись по обычным правилам математики с последующим нахождением и самого максимума.

На рисунках соответствующие величины со значком „c“ относятся к стали, с „$к$“ — к кварцу. Индекс A — к случаю A, индекс 1 относится к случаю B при $\frac{\delta_0}{d}=0{,}01$, индекс 2 — при $\frac{\delta_0}{d}=0{,}1$.

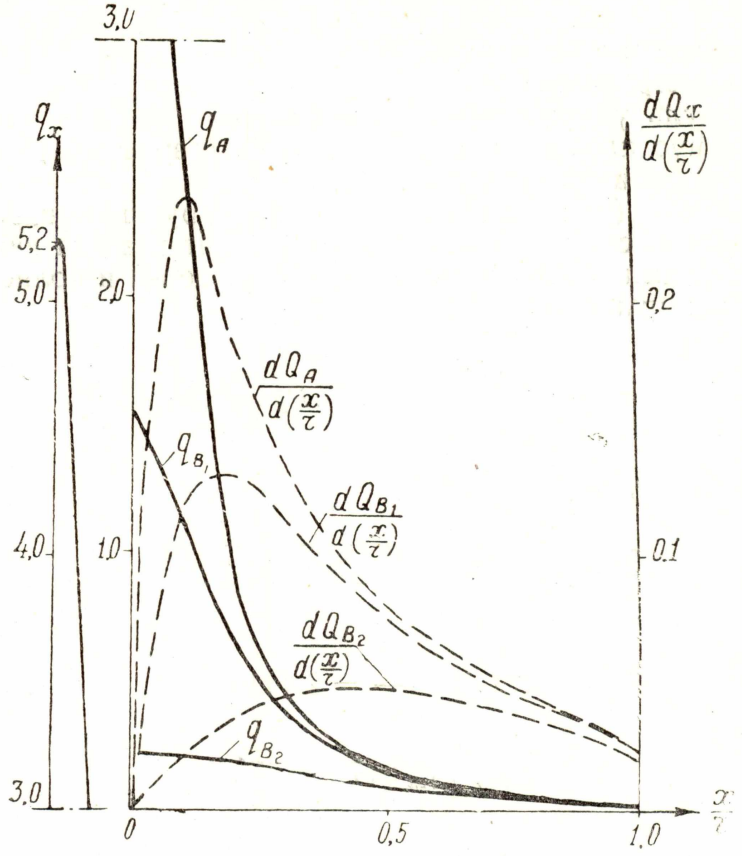

Рис. 4

Графики рис. 2, 3 и 4 позволяют отметить следующее.

а) При наличии между зернами идеального контакта по площадке (случай A, рис. 2) последней соответствует максимальный тепловой поток, который имеет постоянную величину при значениях x от $x=0$ до $x=r_0$. При $x>r_0$ он резко убывает. Величины максимального значения q_x и крутизна кривой определяются коэффициентом теплопроводности материала зерен и наиболее ярко выражены для материалов с высоким $\lambda_м$.

Кривая распределения передаваемого тепла состоит также из двух участков: от 0 до r_0 $\frac{dQ_x}{d\left(\frac{x}{r}\right)}$ возрастает линейно, а далее — по кривой, имеющей максимум. Величина и положение максимума ее определяются коэффициентом теплопроводности материала зерен $\lambda_м$.

Площадь под кривой распределения тепла есть полное количество тепла, передаваемого от зерна к зерну. Как видно из графика, она тем больше, чем больше теплопроводность твердого материала $\lambda_м$. Доля тепла, передаваемого непосредственно через контакт, несмотря на большие тепловые потоки, незначительна. Это связано с малой

площадью контакта. Больше того, через более широкую зону, чем контакт (например, до $\frac{x}{r} = 0{,}05$ или даже $\frac{x}{r} = 0{,}1$), передается сравнительно небольшая доля тепла, которая снижается с уменьшением теплопроводности материала $\lambda_м$. При этом возрастает роль теплопередачи через остальные участки.

Случай *Б* не анализируем, так как он несущественно отличается от *А*.

б) Как видно из рис. 3 и 4, кривые тепловых потоков резко меняют свой характер в рассматриваемом интервале отношений $\frac{\delta_0}{d} = 0{,}01—0{,}1$. Для $\frac{\delta_0}{d} = 0{,}01$ — это круто падающая кривая, для $\frac{\delta_0}{d} = 0{,}1$ — слабо снижающаяся линия.

Интересно отметить, что при одинаковых значениях $\frac{\delta_0}{d}$ (особенно при повышенных) для кварца и стали величины тепловых потоков приблизительно одинаковы.

На рис. 3 видно также, что передаваемое тепло в основном зависит от относительного зазора $\frac{\delta_0}{d}$ и мало зависит от теплопроводности зерен $\lambda_м$. Через область, лежащую около $\frac{x}{r} = 0$, передается ничтожное количество тепла.

При относительно больших $\frac{\delta_0}{d}$ (например, 0,1) распределение передаваемого тепла носит такой характер, что область $\frac{x_0}{r} > 0{,}5$ становится по передаче тепла приблизительно равноценной области $\frac{x}{r} < 0{,}5$.

в) На рис. 4 приведены зависимости тепловых потоков q и передаваемого тепла $\frac{dQ}{d\left(\frac{x}{r}\right)}$ для случаев A, B_1 $\left(\frac{\delta_0}{d} = 0{,}01\right)$ и B_2 $\left(\frac{\delta_0}{d} = 0{,}1\right)$ при одном и том же материале (кварц). Видно, что тепловые потоки и количество передаваемого тепла зависят от способа контактирования, причем приближенно можно оценить, что тепло, передаваемое в случае A, B_1 и B_2, относительно как 3:2:1.

Из этого рассмотрения фигур 2, 3 и 4 мы делаем три вывода, которые необходимо учитывать при разработке метода теоретического расчета теплопроводности зернистого материала.

1. В любом из трех рассматриваемых случаев контактирования через контакт и область от $\frac{x}{r} = 0$ до $\frac{x}{r} \approx 0{,}02—0{,}03$ передается пренебрежимо малое количество тепла ввиду ничтожной площади, приходящейся на контакт и эту область.

2. Расчет теплопроводности зернистого материала должен производиться с учетом передаваемого тепла по всему сечению вплоть до $\frac{x}{r} = 1$, особенно для неметаллических материалов.

3. Предпосылкой разработки надежного метода расчета является правильный выбор характера контактирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляликов А. С. К вопросу о теплопроводности зернистого материала, диссертация, Томск, 1956.
2. Машиностроение., Энциклопедический справочник, т. 1, кн. 1, М., 1947.