ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 110 1962

О РЕШЕНИИ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. П. БОЙКОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

Предлагаемый метод решения двухмерных задач наиболее удобно может быть иллюстрирован на примере нестационарного распространения тепла при граничных условиях первого и третьего рода, так как окончательный результат легко сравнить с выражением, полученным на основе перемножения температурных критериев.

Известно, что процесс распространения тепла в бесконечном брусе прямоугольного или квадратного сечения описывается дифференциальным уравнением теплопроводности вида:

$$a\left(\frac{\partial^2 t(x;y;\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t(x;y;\tau)}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial t(x;y;\tau)}{\partial\tau}. \qquad (1)$$

Согласно [2]

$$a\frac{\partial^2 t(x;y;\tau)}{\partial x^2}\cdot\xi=\frac{\partial t(x;y;\tau)}{\partial\tau};$$

$$a\frac{\partial^2 t(x;y;\tau)}{\partial y^2}\cdot\frac{\xi}{\xi-1}=\frac{\partial t(x;y;\tau)}{\partial\tau}.$$

После частного интегрирования, в результате которого соблюдены условия симметрии, получаем

$$\nu(x;y;\tau)=\varphi_1(y)\cos(K_n x)\cdot e^{-\xi a K_n^2\tau};$$

$$\nu(x;y;\tau)=\varphi_2(x)\cos K_m y)\cdot e^{-\frac{\xi}{\xi-1}aK_m^2\tau}$$

где ν — избыточная температура тела.

При $x=0$ и, соответственно, $y=0$ имеем

$$\nu(0;y;\tau)=\varphi_1(y)\cdot e^{-\xi a K_n^2\tau};$$

$$\nu(x;0;\tau)=\varphi_2(x)\cdot e^{-\frac{\xi}{\xi-1}aK_m^2\tau}.$$

Следовательно,

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = \varphi(0;\ y;\ \tau)\cdot\cos(K_n x);$$

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = \varphi(x;\ 0;\ \tau)\cdot\cos(K_m y).$$

Значения $\nu(0;\ y;\ \tau)$ и $\nu(x;\ 0;\ \tau)$ можно найти, решив уравнения

$$a\,\frac{\partial^2\nu(x;\ 0;\ \tau)}{\partial x^2}\,\xi = \frac{\partial\nu(x;\ 0;\ \tau)}{\partial\tau};$$

$$a\,\frac{\partial^2\nu(0;\ y;\ \tau)}{\partial y^2}\cdot\frac{\xi}{\xi-1} = \frac{\partial\nu(0;\ y;\ \tau)}{\partial\tau}.$$

Из этих уравнений следует

$$\nu(x;\ 0;\ \tau) = B_1\cdot\cos(K_n x)\cdot e^{-\xi a K_n^2\tau};$$

$$\nu(0;\ y;\ \tau) = B_2\cdot\cos(K_m y)\cdot e^{-\frac{\xi}{\xi-1}aK_m^2\tau}.$$

Тогда

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = B_2\cdot\cos(K_m y)\cdot\cos(K_n x)\cdot e^{-\frac{\xi}{\xi-1}aK_m^2\tau};$$

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = B_1\cdot\cos(K_n x)\cdot\cos(K_m y)\cdot e^{-\xi a K_n^2\tau}.$$

При $x = y = 0$ получается температура центра $\nu\,(0;\ 0;\ \tau)$, поэтому

$$B_2\cdot e^{-\frac{\xi}{\xi-1}aK_m^2\tau} = B_1\cdot e^{-\xi a K_n^2\tau}.$$

Таким образом, общее решение получается в форме

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = B\cdot\cos(K_n x)\cdot\cos(K_m y)\cdot e^{-\xi a K_n^2\tau}. \qquad (2)$$

Найдем теперь постоянную величину ξ так, чтобы соблюдалось условие (1). Подстановка общего решения (2) в дифференциальное уравнение теплопроводности (1) дает

$$\xi = 1 + \frac{K_m^2}{K_n^2};$$

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = B\cdot\cos(K_n x)\cdot\cos(K_m y)\cdot e^{-a(K_n^2+K_m^2)\tau}. \qquad (3)$$

Согласно (3) и граничным условиям третьего рода, находим

$$\mathrm{ctg}\mu_n = \frac{\mu_n}{Bi_n};\qquad \mathrm{ctg}\mu_m = \frac{\mu_m}{Bi_m},$$

где

$$\mu_n = K_n R_1;\qquad \mu_m = K_m R_2.$$

2*.

Это означает, что решение (3) должно быть представлено бесконечным рядом

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B\cos\left(\mu_n\frac{x}{R_1}\right)\cdot\cos\left(\mu_m\frac{y}{R_2}\right) e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{R_1^2}}\cdot e^{-\mu_m^2\frac{a\tau}{R_2^2}}$$

Для определения постоянной B используем начальные условия

$$\nu(x;\ y;\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B\cdot\cos\left(\mu_n\frac{x}{R_1}\right)\cdot\cos\left(\mu_m\frac{y}{R_2}\right) = \nu_0,$$

проинтегрировав их предварительно по y и по x

$$\int_{-R_1}^{+R_1}\int_{-R_2}^{+R_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B\cos\left(\mu_n\frac{x}{R_1}\right)\cdot\cos\left(\mu_m\frac{y}{R_2}\right)\cdot\cos\left(\mu_{n^*}\frac{x}{R_1}\right)$$

$$\times\cos\left(\mu_{m^*}\frac{y}{R_2}\right)\cdot dydx = \nu_0\int_{-R_1}^{+R_1}\int_{-R_2}^{+R_2}\cos\left(\mu_{n^*}\frac{x}{R_1}\right)\cdot\cos\left(\mu_{m^*}\frac{y}{R_2}\right)dydx.$$

Согласно условиям ортогональности, все члены ряда, кроме случая $\mu_n=\mu_{n*}$ и $\mu_m=\mu_{m*}$, равны нулю, а поэтому

$$\int_{-R_1}^{+R_1}\int_{-R_2}^{+R_2} B\cdot\cos^2\left(\mu_n\frac{x}{R_1}\right)\cdot\cos^2\left(\mu_m\frac{y}{R_2}\right)dydx =$$

$$= \nu_0\int_{-R_1}^{+R_1}\int_{-R_2}^{+R_2}\cos\left(\mu_n\frac{x}{R_1}\right)\cdot\cos\left(\mu_m\frac{y}{R_2}\right)dydx.$$

Отсюда

$$B=\nu_0\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cdot\cos\mu_n}\cdot\frac{2\sin\mu_m}{\mu_m+\sin\mu_m\cdot\cos\mu_m} = \nu_0 A_n\cdot A_m.$$

Окончательное решение задачи принимает вид

$$\nu(x;\ y;\ \tau) = \nu_0\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cos\left(\mu_n\frac{x}{R_1}\right)\cdot e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{R_1^2}}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty} A_m\cdot\cos\left(\mu_m\frac{y}{R_2}\right)\cdot e^{-\mu_m^2\frac{a\tau}{R_2^2}}.$$

Точно такое же выражение получается при перемножении температурных критериев двух бесконечных пластин толщиною $2R_1$ и $2R_2$ [1]. Проверка показала, что изложенный метод может быть удовлетворительно использован для решения задач стационарной теплопроводности при внутреннем тепловыделении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. ГИТЛ, М., 1952.
2. Бойков Г. П. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. „Изв. ТПИ“, том 101, 1958.