

## СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СЕГМЕНТЕ

В. В. ИВАНОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

В некоторых приложениях необходимо знать стационарное распределение температуры в бесконечном бруске, сечение которого представляет собой сегмент с центральным углом  $2\beta$  и длиной хорды  $2R_0$ . Поверхности, соответствующие дуге и хорде сегмента, поддерживаются соответственно при температурах  $T$  и нуль. Между поверхностями имеется теплоизоляция: точки  $iR_0$ ,  $-iR_0$  (рис. 1а).

Для решения этой задачи воспользуемся конформными отображениями.

Дробно-линейное отображение

$$z_1 = R_0 \frac{iR_0 - Z}{iR_0 + Z} \quad (1)$$

переводит область, ограниченную сегментом, на внутренность угла  $\beta$  (рис. 1б). При этом линии изотерм нуля и  $T$  плоскости  $Z$  переходят на плоскость  $z_1$  соответственно в действительную положительную полуось и луч  $\varphi_1 = \beta$ .

С помощью функции

$$z_2 = z_1^{\pi/2\beta} \quad (2)$$

преобразуем угол  $\beta$  в прямой (рис. 1в) и используем отображение

$$z = iR_0^{\pi/2\beta} \frac{z_2 + R_0^{\pi/2\beta}}{z_2 - R_0^{\pi/2\beta}}, \quad (3)$$

переводящее прямой угол в полукруг радиуса  $R_0^{\pi/2\beta}$  (рис. 1г). Заменяя для удобства письма  $R_0^{\pi/2\beta}$  через  $R$ , найдем, что функция

$$W = \frac{1}{i} \ln \frac{z}{R}, \quad \text{где } W = u + iv,$$

отображает полукруг на полуполосу (рис. 1д). Изолирующие точки  $iR$  и  $-iR$ , изотермы  $T$  и нуля плоскости  $z$  отображаются на плоскость  $W$  соответственно в точки  $\pi/2$ ,  $-\pi/2$ , в отрезок  $(-\pi/2, \pi/2)$  и прямые  $u = -\pi/2$  и  $u = \pi/2$  ( $\text{Im } W > 0$ ).

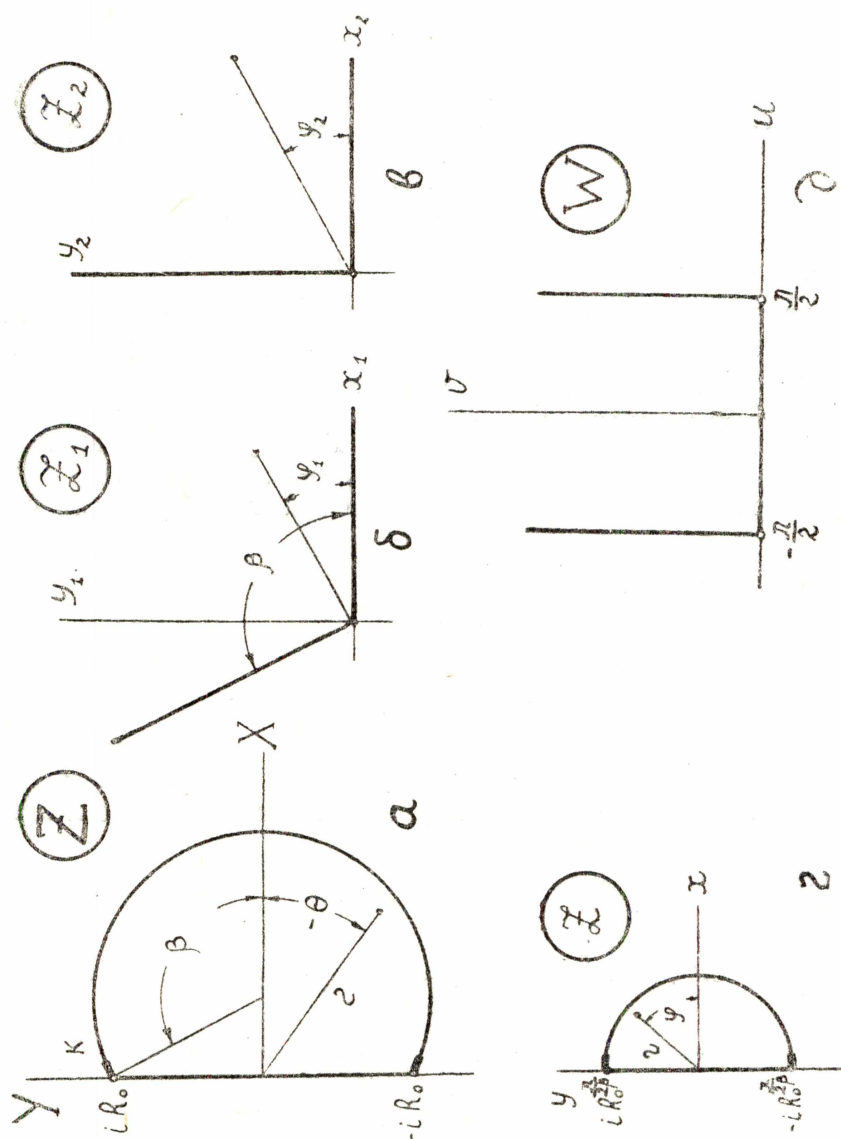


Рис. 1.

Температурное поле в этой полуполосе дается уравнением [1]

$$t(W) = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos u}{\operatorname{sh} v} \quad (4)$$

Так как  $z = Re^{i\omega}$ , то, заменяя  $z = re^{i\varphi}$ , получим  $u = \varphi$ , а  $v = -\ln r/R$ . Подставляя значения  $u$  и  $v$  в (4), найдем распределение температуры в полукруге радиуса  $R$ :

$$t(z) = t(r, \varphi) = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2Rr \cos \varphi}{R^2 - r^2} \quad (5)$$

Решая (3) относительно  $z_2$  при  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , получим, что

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_2} = \operatorname{arctg} \frac{2Rr \cos \varphi}{R^2 - r^2}, \\ \text{а } t(z_2) &= \frac{2T}{\pi} \varphi_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Объединяя (2) и (6), определим температурное поле внутри угла  $\beta$

$$t(z_1) = \frac{T}{\beta} \varphi_1.$$

Подставляя  $Z = r(\cos \Theta + i \sin \Theta)$  в (1), имеем, что

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg} \frac{2R_0 r \cos \Theta}{R_0^2 - r^2}.$$

Отсюда искомое распределение температуры в сегменте имеет вид

$$t(Z) = t(r, \Theta) = \frac{T}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{2R_0 r \cos \Theta}{R_0^2 - r^2}.$$

Тепло через сегмент  $Q_\beta = -\lambda \int_S \operatorname{grad} t ds \left[ \frac{\text{ккал}}{\text{м. час}} \right]$  можно определить на основе эквивалентности по тепловому потоку заданного сегмента и полукруга  $R = R_0^{\pi/2\beta}$ , температурное поле в котором дается уравнением (5),

$$\operatorname{grad} t = \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{2T}{\pi R \cos \varphi}, \text{ а } ds = R d\varphi.$$

Угол  $\varphi$  должен меняться от нуля до  $\pi/2 - \left( \frac{\Delta \delta}{R_0} \right)^{\pi/2\beta}$ , где  $\Delta \delta$  — изолирующий отрезок ( $iR_0, K$ ), переходящий на плоскость  $z$  в отрезок  $(\Delta \delta)^{\pi/2\beta}$ . Следовательно,

$$Q_\beta = 2\lambda \int_{\frac{\pi}{2} - \left( \frac{\Delta \delta}{R_0} \right)^{\pi/2\beta}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2TR d\Theta}{\pi R \cos \Theta} = \frac{4\lambda T}{\pi} \operatorname{Intg} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \delta}{R_0} \right)^{\frac{\pi}{2\beta}} \right] \quad (7)$$

Нами проводилась проверка формулы (7) методом электротепловых аналогий на плоской электрической модели сегмента, изготовленной из электропроводной бумаги. По контурам модели укреплялись 2 медные шины, имитирующие изотермические поверхности  $T$  и нуля [2].

По закону Ома сила тока, протекающего в модели,

$$I = \frac{h}{\rho} \Delta V \cdot \Phi. \quad (8)$$

Здесь  $\Delta V$ —напряжение на шинах,  $\rho$ —удельное электрическое сопротивление бумаги толщиной  $h$ ,  $\Phi$ —безразмерный коэффициент формы, с другой стороны,

$$Q_{\beta} = \lambda T \Phi.$$

Поэтому

$$\Phi = \frac{4}{\pi} \operatorname{Intg} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \delta}{R_0} \right)^{\pi/2\beta} \right]. \quad (9)$$

Проверка производилась путем сравнения значений  $\Phi$ , полученных расчетом (9) и из опыта (8). Опыты производились для сегментов с углами  $\beta$  в  $68^\circ$  и  $110^\circ$ . Результаты сведены в таблицу

| $\beta^\circ$ | $R_0$ мм | $\Delta h$ мм | $\rho/h$ ом | $\Phi_{\text{расчет}}$ | $\Phi_{\text{опыт}}$ | Погрешность, % |
|---------------|----------|---------------|-------------|------------------------|----------------------|----------------|
| 68            | 121,8    | 1,400         | 330         | 8,60                   | 8,75                 | 1,875          |
| 110           | 125,7    | 1,065         | 295         | 5,90                   | 5,96                 | 1,015          |

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1958.
2. Петухов Б. С. Опытное изучение процессов теплопередачи. Госэнергоиздат, 1952.