ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 110 1962

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В НЕКОТОРЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

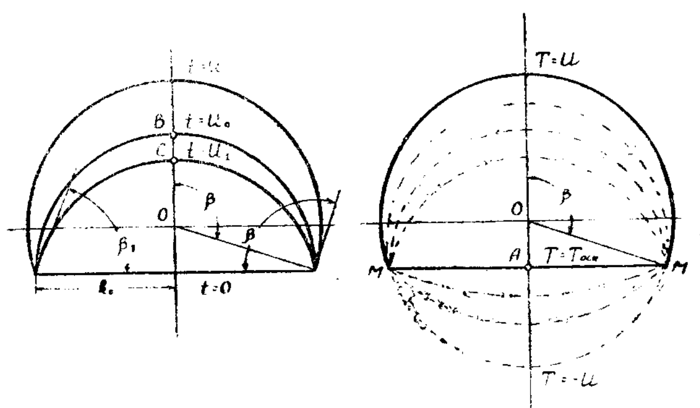
В. В. ИВАНОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

Шаровой сегмент

Постановка задачи: найти стационарное распределение температуры в шаровом сегменте радиуса R, если поверхности сферы и основания поддерживаются соответственно при температурах U и нуль (рис. 1 *а*).

Определим сначала температурное поле в шаре радиуса R, когда часть его поверхности, соответствующая заданному шаровому сег-



а Рис. 1. *б*

менту, остается при температуре U, а другая часть имеет температуру $(-U)$ (рис. 1 *б*). Задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial T}{\partial\Theta}\right) = 0$$

с граничными условиями

$$T(r, \Theta)_{r=R} = \begin{cases} U \text{ при } 0 \leqslant \Theta < \beta \\ -U \text{ при } \beta < \Theta \leqslant \pi \end{cases}$$

Решение строится в виде ряда

$$T(r,\Theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\Theta),$$

где $P_n(x)$—полиномы Лежандра n-го порядка.
Постоянные a_n определяются из граничных условий

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{\pi}^{0}T(R,\Theta)P_n(\cos\Theta)\,d(\cos\Theta).$$

Или, заменив $\cos\Theta=x$,

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{\cos\beta}(-U)P_n(x)\,dx+\int_{\cos\beta}^{1}UP_n(x)\,dx\right].$$

Вычисляя интегралы с помощью рекуррентной формулы

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x),$$

окончательно найдем

$$T(r,\Theta)=U\left\{-\cos\beta+\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\beta)-P_{n+1}(\cos\beta)]\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\Theta)\right\}. \quad (1)$$

Изотермы внутри шара имеют вид сферических поверхностей, заканчивающихся на окружности MM, кроме одной изотермы—плоскости, проходящей через точку $A(R\cos\beta,\pi)$ и являющейся основанием заданного сегмента (рис. 1 *б*), для которой

$$T_{осн}=T(R\cos\beta,\pi)=U\Big\{-\cos\beta+\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\beta)-$$
$$-P_{n+1}(\cos\beta)](\cos\beta)^n(-1)^n\Big\}. \quad (2)$$

Вычитая (2) из (1), получим распределение температуры в шаровом сегменте, основание которого поддерживается при 0°, а сферическая поверхность—при температуре:

$$U-T_{осн}=U\Big\{1+\cos\beta-\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\beta)-P_{n+1}(\cos\beta)](\cos\beta)^n(-1)_n\Big\} \quad (3)$$

Разделив теперь разность $T(r,\Theta)-T_{осн}$ на фигурную скобку формулы (3), найдем искомое температурное поле

$$t(r,\Theta)=U\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[P_{n-1}(\cos\beta)-P_{n+1}(\cos\beta)\Big]\Big[\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\Theta)-(\cos\beta)^n(-1)^n\Big]}{1+\cos\beta-\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n-1}(\cos\beta)-P_{n+1}(\cos\beta)](\cos\beta)^n(-1)^n}. \quad (4)$$

Если угол β острый, то в уравнении (4) выпадает $(-1)^n$. Полагая $\cos\beta=0$ и используя соотношения

$$P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)=P_{n-1}(0)\ \frac{2n+1}{n+1},$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}\ \text{и}\ P_{2n+1}(0)=0,$$

получим, как частный случай формулы (4), стационарное распределение температуры в полушаре:

$$t(r,\Theta)=U\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(4n+3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n(2n+2)}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\Theta), \tag{5}$$

что соответствует решению, приведенному в [3].

Чтобы найти поток тепла через шаровой сегмент, температурное поле в котором дается уравнением (4), выделим в нем изотермическую поверхность—полусферу радиуса R_0 (рис. 1 *а*). В стационарном состоянии Q_β количество тепла, проходящее через поверхность шарового сегмента и через выделенную поверхность полусферы, одно и то же.

Если температура полусферы U_0, то тепло через нее

$$Q_\beta=\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=R_0}\cdot2\pi R_0^2\sin\Theta\,d\Theta\left[\frac{ккал}{час}\right].$$

Находя градиент по уравнению (5), получим

$$Q_\beta=2\pi\lambda\,U_0\,R_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+3)\,[(2n)!]^2\,(2n+1)}{(2n+2)^2\ \ 2^{4n}\,(n!)^4}\approx\pi\lambda\,U_0\,R_0\cdot7{,}53.$$

Так как изотерма U_0 проходит через точку B (рис. 1 *а*), то, подставляя в (4) ее координаты $r=R\,|\sin\beta+\cos\beta|$, $\Theta=0$ и задаваясь различными $\beta>\frac{\pi}{2}$, находим зависимость $U_0=UF(\beta)$ для тупых углов β.

С другой стороны, изотерма U_1, являющаяся поверхностью шарового сегмента с углом $\beta_1<\frac{\pi}{2}$, проходит через точку C (рис. 1*а*). Подставляя координаты точки C

$$r=R\left(\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_1}{2}+\cos\beta\right),\quad\Theta=0,$$

при заданном постоянном $\beta>\frac{\pi}{2}$ в уравнение (4) и заменяя в нем $U=U_0/F(\beta)$, найдем $F(\beta_1)$—связь между U_1 и U_0 для острых углов β. Окончательно:

$$Q=7{,}53\,\pi\lambda\,R_0\,U\,F(\beta)\left[\frac{ккал}{час}\right],$$

где $R_0 = R \sin\beta$ — радиус основания шарового сегмента, а $F(\beta)$ находится по кривой (рис. 2).

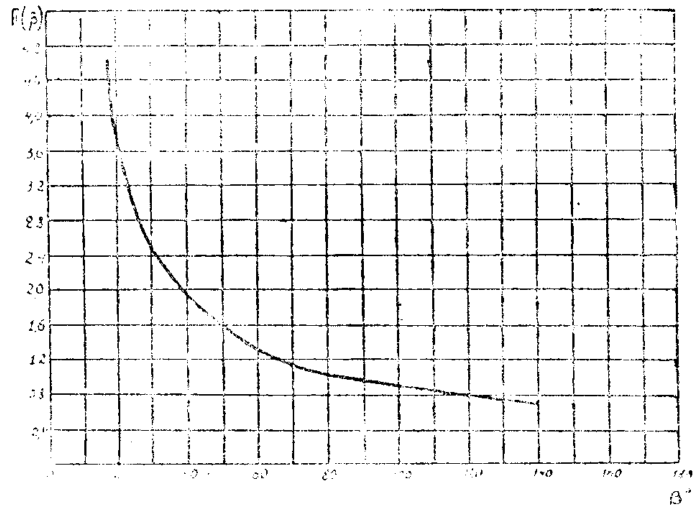


Рис. 2.

Срезанный вытянутый сфероид

Постановка задачи: найти стационарное распределение температуры внутри срезанного вытянутого сфероида (рис. 3*а*), если поверхность вращения поддерживается при температуре U, а плоскость среза имеет температуру, равную нулю.

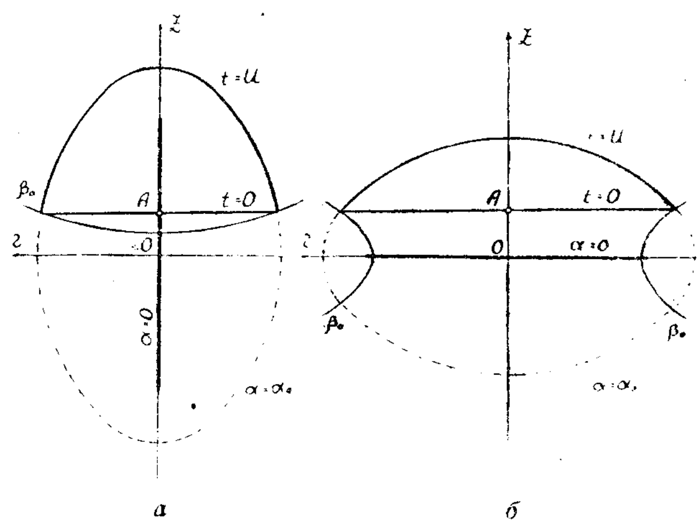


Рис. 3.

Задача решается аналогично предыдущей. Сначала определим температурное поле в вытянутом сфероиде, если часть его поверхности, соответствующая заданному срезанному вытянутому сфероиду, остается при температуре U, а другая часть имеет температуру $(-U)$. Вводим вырожденные эллипсоидальные координаты: α, β, φ [1, 2]. Тогда решение уравнения Лапласа

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\operatorname{sh}\alpha\,\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right]+\frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sin\beta\,\frac{\partial T}{\partial\beta}\right]=0$$

имеет вид

$$T(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} P_n(\cos\beta). \tag{6}$$

Здесь $\alpha=\alpha_0$—уравнение поверхности заданного вытянутого сфероида, а f_n—постоянные, определяемые из граничных условий

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\pi}^{0} T(\alpha_0, \beta) P_n(\cos\beta)\, d(\cos\beta),$$

причем

$$T(\alpha, \beta)_{\alpha=\alpha_0} = \begin{cases} U & \text{при } 0 \leqslant \beta < \beta_0 \\ -U & \text{при } \beta_0 < \beta \leqslant \pi \end{cases}$$

После подстановки f_n в (6) получим

$$T(\alpha, \beta) = U\left\{-\cos\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - \right.$$

$$\left. - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} P_n(\cos\beta)\right\}. \tag{7}$$

Одна из изотерм внутри вытянутого сфероида представляет собой плоскость, проходящую через точку A с координатами $\alpha=0$, $\beta=\beta_A$ или $\alpha=\alpha_A$, $\beta=0$, и является основанием для заданного срезанного вытянутого сфероида. Поэтому

$$T_{осн} = T(0, \beta_A) = U\left\{-\cos\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - \right.$$

$$\left. - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \frac{P_n(\cos\beta_A)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}\right\}. \tag{8}$$

Вычитая (8) из (7) и деля эту разность на фигурную скобку выражения

$$U - T_{осн} = U\left\{1 + \cos\beta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - \right.$$

$$\left. - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \frac{P_n(\cos\beta_A)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}\right\},$$

получим искомое температурное поле:

$$t(\alpha, \beta) = $$

$$= U \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \left[\frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha) P_n(\cos\beta) - P_n(\cos\beta_A)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}\right]}{1 + \cos\beta_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \frac{P^n(\cos\beta_A)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}},$$

где $\cos\beta_A = \operatorname{ch}\alpha_0 \cos\beta_0$.

Когда плоскость среза проходит через точку $A(\alpha_A, 0)$, решение имеет вид

$$t(\alpha, \beta) = U \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \left[\frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha) \cdot P_n(\cos\beta) - P_n(\operatorname{ch}\alpha_A)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)} \right]}{1 + \cos\beta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \frac{P_n(\operatorname{ch}\alpha_A)}{P_n(\operatorname{ch}\alpha_0)}},$$

где $\operatorname{ch}\alpha_A = \operatorname{ch}\alpha_0 \cos\beta_0$.

Для случая половины вытянутого сфероида ($\alpha_A = 0$, $\beta_A = \pi/2$, $\beta_0 = \pi/2$)

$$t(\alpha, \beta) = U \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch}\alpha)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch}\alpha_0)} P_{2n+1}(\cos\beta),$$

что соответствует решению, приведенному в [4].

Срезанный сжатый сфероид

Определим температурное поле в срезанном сжатом сфероиде, если температуры плоскости среза и поверхности вращения равны соответственно нулю и U (рис. 3*б*). Используя вырожденные эллипсоидальные координаты α, β, φ [1, 2] и не повторяя рассуждений предыдущих параграфов, найдем, что решение уравнения Лапласа

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\operatorname{ch}\alpha \frac{\partial T}{\partial\alpha} \right) + \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\sin\beta \cdot \frac{\partial T}{\partial\beta} \right) = 0$$

для сжатого сфероида, $\alpha = \alpha_0$, имеет вид

$$T(\alpha, \beta) = U \left\{ -\cos\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - \right.$$

$$\left. - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \frac{P_n(i \operatorname{sh}\alpha)}{P_n(i \operatorname{sh}\alpha_0)} P_n(\cos\beta) \right\}.$$

Причем

$$T(\alpha, \beta)_{\alpha=\alpha_0} = \begin{cases} U & \text{при } 0 \leqslant \beta < \beta_0 \\ -U & \text{при } \beta_0 < \beta \leqslant \pi \end{cases}.$$

Если срез проходит через точку $A(\alpha_A, 0)$, то искомое температурное поле выражается уравнением:

$$t(\alpha, \beta) = U \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \left[\frac{P_n(i \operatorname{sh}\alpha) P_n(\cos\beta) - P_n(i \operatorname{sh}\alpha_A)}{P_n(i \operatorname{sh}\alpha_0)} \right]}{1 + \cos\beta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos\beta_0) - P_{n+1}(\cos\beta_0)] \frac{P_n(i \operatorname{sh}\alpha_A)}{P_n(i \operatorname{sh}\alpha_0)}},$$

причем $\operatorname{sh}\alpha_A = \operatorname{sh}\alpha_0 \cos\beta_0$

Для случая $\alpha_A = 0$, $\beta_0 = \pi/2$

$$t(\alpha, \beta) = U \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)(4n+3)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n+2)} \frac{P_{2n+1}(i \operatorname{sh}\alpha)}{P_{2n+1}(i \operatorname{sh}\alpha_0)} P_{2n+1}(\cos\beta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ГИИЛ, 1952
2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, 1953
3. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. Гостехиздат, 1957.
4. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, 1955.