

**К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЛУЧЕННОСТИ
ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА НА
ОСНОВАНИЕ ЦИЛИНДРА**

Ю. М. ТРИФОНОВ, Ю. А. ТРИФОНОВА

(Представлена кафедрой машин и аппаратов химических производств)

Исследование геометрических характеристик лучистого теплообмена необходимо для аналитического описания поля излучения, создаваемого данным телом, а также для математического описания динамических свойств тепловых объектов. Знание уравнений динамики позволяет, в свою очередь, производить выбор систем автоматического регулирования в стадии проектирования данного объекта.

В ряде случаев, например, электропечи непрерывной сушки изоляции проводов в кабельной промышленности, теплотехнические агрегаты могут быть представлены в виде условно замкнутой цилиндрической полости, длина которой превышает ее гидравлический диаметр в десять и более раз.

Рассмотрим цилиндрическую полость с диаметром поперечного сечения $D = 2R_0$, заполненную диатермической средой (рис. 1). Внутренняя поверхность полости предполагается серой, изотермической и оптически однородной.

При применении общей формулы для определения коэффициентов облученности [1] в случае элементарного цилиндрического кольца и основания цилиндра имеем

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \beta_N \cdot \cos \beta_M}{\pi \cdot s^2} \cdot dF_N \cdot dF_M, \quad (1)$$

где

dF_N и dF_M — элементарные площадки соответственно на цилиндрическом кольце и на основании цилиндра;

β_N и β_M — углы, составленные направлением излучения с нормальными к площадкам dF_N и dF_M .

s — расстояние между центрами площадок dF_N и dF_M ,

F_1 и F_2 — площади соответственно элементарного цилиндрического кольца и основания цилиндра.

При обозначениях, как на рис. 1:

$$\left. \begin{aligned} dF_N &= R_0 \cdot dh \cdot d\alpha_N; & dF_M &= r \cdot dr \cdot d\alpha_M; \\ \cos \beta_N &= \frac{R_0 - r \cdot \cos(\alpha_N - \alpha_M)}{s}; & \cos \beta_M &= \frac{h}{s}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из геометрических соотношений можно вывести

$$s = \sqrt{R_0^2 + r^2 + h^2 - 2R_0 \cdot r \cdot \cos(\alpha_N - \alpha_M)}. \quad (3)$$

После подстановки уравнений (2) и (3) в (1) получим:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\pi F_1} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[R_0 - r \cdot \cos(\alpha_N - \alpha_M)] \cdot h \cdot R_0 \cdot dh \cdot d\alpha_N \cdot r \cdot dr \cdot d\alpha_M}{[R_0^2 + r^2 + h^2 - 2R_0 \cdot r \cdot \cos(\alpha_N - \alpha_M)]^2} \quad (4)$$

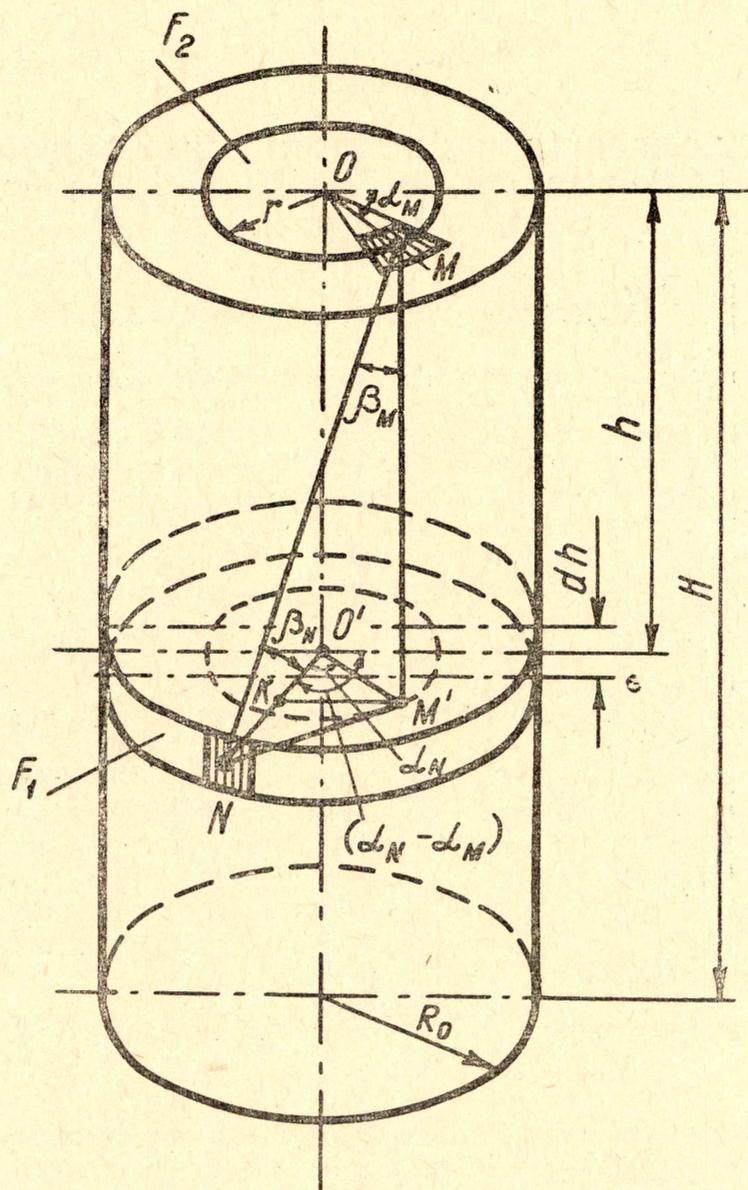


Рис. 1. К расчету коэффициента облученности

Проинтегрировав по α_N и обозначив результат первого интегрирования через I_1 , имеем

$$I_1 = \frac{2a(R_0 \cdot b + r \cdot c)}{\sqrt{(b^2 - c^2)^3}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \Big|_{-\alpha_M}^{2\pi - \alpha_M}, \quad (5)$$

где

$$a = \frac{h \cdot R_0 \cdot dh \cdot r \cdot dr \cdot d\alpha_M}{\pi \cdot F_1}; \quad b = h^2 + R_0^2 + r^2;$$

$$c = -2R_0 \cdot r; \quad \alpha = \alpha_N - \alpha_M.$$

Можно показать, что последующее интегрирование выражения (5) не дает возможности разрешить его в элементарных функциях [2].

Для получения приближенного решения исследуем поведение коэффициента перед $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ при изменении отношения h/R_0 . Обозначив этот коэффициент через κ , подставим в него выражения для b и c и после преобразований получим

$$\kappa = \sqrt{\frac{\left(\frac{h}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{R_0} + 1\right)^2}{\left(\frac{h}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{R_0} - 1\right)^2}} \quad (6)$$

Очевидно, что при изменении отношения $\frac{h}{R_0}$ на отрезке $[0, \infty]$, значения коэффициента κ лежат в интервале $[+\infty, 1]$.

В табл. 1 приведены данные расчета коэффициента κ по формуле (6) для различных значений отношения h/R_0 .

Сравнение результатов показывает:

Таблица 1

$r/R_0 \backslash h/R_0$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	1,00	1,50	2,34	4,00	9,00	
0,5	1,00	1,38	1,90	2,82	3,46	4,12
1	1,00	1,22	1,48	1,75	2,02	2,24
2	1,00	1,08	1,17	1,26	1,34	1,41
3	1,00	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20
4	1,00	1,025	1,05	1,07	1,10	1,12
5	1,00	1,015	1,034	1,049	1,063	1,077
6	1,00	1,01	1,02	1,034	1,039	1,049
10	1,00	1,005	1,007	1,01	1,015	1,020

1) если отношение $h/R_0 = \text{const}$, то максимального значения κ достигает при $r/R_0 = 1$, а минимального — при $\frac{r}{R_0} = 0$;

2) при $\frac{h}{R_0} > 6$ коэффициент κ отличается от единицы не более чем на 5% и принимает значения в пределах

$$1 \leq \kappa \leq 1,049.$$

Обозначив $\operatorname{arctg}\left(\kappa \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$ через y , рассчитаем абсолютную Δy и относительную δ ошибки, которые возникнут при замене $\kappa = 1,05$ на $\kappa = 1$. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Приняв $\kappa = 1$, выражение (5) можно записать:

$$I_1 = \frac{2\pi a(R_0 b + rc)}{\sqrt{(b^2 - c^2)^3}}. \quad (7)$$

Интегрирование соотношения (4) в пределах от $\alpha_M = 0$ до $\alpha_M = 2\pi$, от $r = 0$ до $r = R_0$ дает

$$\varphi_{1,2} = \frac{\pi \cdot h \cdot dh}{F_1} \cdot \left[\frac{h^2 + 2R_0^2}{\sqrt{h^4 + 4h^2 R_0^2}} - 1 \right], \quad (8)$$

где $F_1 = 2\pi R_0 \cdot dh$.

После преобразований формула (8) приобретает вид:

$$\varphi_{1,2} = \frac{\left(\frac{h}{D}\right)^2 + 0,5}{\sqrt{\left(\frac{h}{D}\right)^2 + 1}} - \frac{h}{D}. \quad (9)$$

При $h/D \rightarrow \infty$ коэффициент $\varphi_{1,2} \rightarrow 0$, а при $h/D \rightarrow 0$ коэффициент $\varphi_{1,2} \rightarrow 0,5$, что соответствует физическому смыслу коэффициента облученности.

Таблица 2

$\frac{\alpha}{2}$	0°	1°	6°	12°	15°
Δy	0	3'	18'	37'	45'
δ [%]	0	4,75	4,76	4,9	4,75
$\frac{\alpha}{2}$	30°	45°	60°	75°	90°
Δy	1°13'	1°24'	1°13'	0°42'	0°
δ [%]	3,92	3,02	1,99	0,93	0

Для проверки полученного результата решим поставленную задачу методом лучевой алгебры [4].

Для замкнутой системы четырех тел F_1, F_2, F_3, F_4 (рис. 2) можем записать определяющие уравнения:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{1,1} + \bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,3} + \bar{\varphi}_{1,4} = 1 \\ \bar{\varphi}_{2,1} + \bar{\varphi}_{2,2} + \bar{\varphi}_{2,3} + \bar{\varphi}_{2,4} = 1 \\ \bar{\varphi}_{3,1} + \bar{\varphi}_{3,2} + \bar{\varphi}_{3,3} + \bar{\varphi}_{3,4} = 1 \\ \bar{\varphi}_{4,1} + \bar{\varphi}_{4,2} + \bar{\varphi}_{4,3} + \bar{\varphi}_{4,4} = 1 \end{cases} \quad (10)$$

Для решения системы уравнений (10) относительно $\bar{\varphi}_{1,2}$ проведем делитель F_D на границе поверхностей F_1 и F_3 и воспользуемся выражением для коэффициента облученности круга на круг [3]-

$$\varphi = \left[\frac{h}{D} - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{D} \right)^2} \right]^2. \quad (11)$$

В результате имеем:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = (\bar{\varphi}_{D,2} - \bar{\varphi}_{4,2}) \frac{D}{4 \cdot \Delta h}, \quad (12)$$

где

$\bar{\varphi}_{1,2}$ — коэффициент облученности бесконечно малого цилиндрического кольца высотой Δh на основание F_2 ;

$\bar{\varphi}_{D,2}$ — коэффициент облученности между делителем F_D и основанием F_2 ;

$\bar{\varphi}_{4,2}$ — коэффициент облученности между основаниями F_4 и F_2 .

Значения $\bar{\varphi}_{D,2}$ и $\bar{\varphi}_{4,2}$ определяем по (11), тогда коэффициент облученности в приращениях можно записать так:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \{ [x - \sqrt{1+x^2}] - [(x + \Delta x) - \sqrt{1+(x + \Delta x)^2}] \} \frac{1}{4 \Delta x}, \quad (13)$$

где

$x = \frac{h}{D}$ — безразмерная высота,

$\Delta x = \frac{\Delta h}{D}$ — приращение безразмерной высоты.

При $\Delta x \rightarrow 0$ $\bar{\varphi}_{1,2}$ запишется следующим образом:

$$\varphi_{1,2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{4} \lim \left[\frac{\varphi(x) - \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \right], \quad (14)$$

где

$$\varphi(x) = [x - \sqrt{1+x^2}]^2,$$

$$\varphi(x + \Delta x) = [(x + \Delta x) - \sqrt{1+(x + \Delta x)^2}]^2.$$

В дифференциальной форме:

$$\varphi_{1,2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

или

$$\varphi_{1,2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{d\varphi}{d\left(\frac{h}{D}\right)}. \quad (15)$$

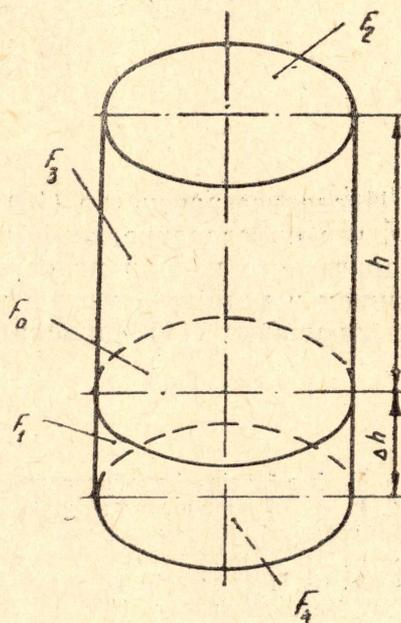


Рис. 2. Замкнутая система из четырех поверхностей

Окончательно имеем, приняв во внимание (11)

$$\varphi_{1,2} = \frac{\left(\frac{h}{D}\right)^2 + 0,5}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{D}\right)^2}} - \frac{h}{D} \quad (16)$$

Вывод

Последнее равенство (16) совпадает с равенством (9). Это показывает, что определение коэффициента облученности элементарного цилиндрического кольца на основании цилиндра приближенным интегрированием и методом лучевой алгебры, при использовании общепринятого соотношения (11) приводит к одинаковому результату.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Хоблер. Теплопередача и теплообменники. ГХИ, 1961.
2. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиздат, 1962.
3. С. Н. Шорин. Теплопередача. Изд-во «Высшая школа», 1964.
4. А. С. Невский. Теплообмен излучением в металлургических печах и топках котлов. Металлургиздат, 1958.