ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 184 1970

ПРЕЦЕССИЯ СПИНА ЭЛЕКТРОНА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

В. Г. БАГРОВ, В. А. БОРДОВИЦЫН

(Представлена проф. В. А. Соколовым)

В работе изучается влияние аномального магнитного момента электрона на поведение его спина при движении в постоянных и однородных ортогональных электрическом и магнитном полях.

Движение электрона в скрещенных полях

Движение релятивистского электрона в электромагнитном поле описывается уравнением Дирака

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathrm{H}\Psi,\ \mathrm{H} = c(\vec{\alpha}\vec{P}) + \rho_3 mc^2 - e\varphi, \tag{1}$$

где $\vec{P} = -i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}$; $\vec{\alpha}$, ρ — матрицы Дирака, $\vec{A}$, φ — потенциалы внешнего поля.

Рассмотрим движение электрона в постоянных и однородных ортогональных электрическом и магнитном полях при условии $E<H$. Систему координат выбираем так, чтобы ось z была направлена по магнитному полю, ось y вдоль электрического поля, и будем считать $E = H\sin\eta\left(-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}\right)$. В этом случае потенциалы поля можно выбрать в виде

$$A_x = -yH,\ A_y = A_z = 0,\ \varphi = -yH\sin\eta.$$

При таком выборе потенциалов интегралами движения являются полная энергия системы H, проекция импульса на магнитное поле P_3 и оператор $p_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Следовательно, волновую функцию, помимо (1), можно подчинить уравнениям

$$\mathrm{H}\Psi = c\hbar K\Psi,\ P_3\Psi = \hbar K_3\Psi,\ p_1\Psi = \hbar K_1\Psi. \tag{2}$$

С учетом этих требований волновая функция имеет вид

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} e^{-icKt + ik_1x + iK_3z}\psi(\tau)$$
$$\tau = \sqrt{\gamma\cos\eta}\left(y + \frac{K\sin\eta - k_1}{\gamma\cos^2\eta},\ \gamma = \frac{eH}{\hbar c}\right). \tag{3}$$

Спинор $\psi(\tau)$ можно записать в форме

$$\psi_i(\tau) = \alpha_i U_2(\tau) + \beta_i U_{n-1}(\tau), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Здесь $U_n(\tau)$ — функции Эрмита, связанные с полиномами Эрмита $H_n(\tau)$ соотношением

$$U_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{\gamma \cos \eta}{\pi}}\, e^{-\frac{\tau^2}{2}} H_n(\tau).$$

Коэффициенты α_i и β_i связаны с двумя произвольными постоянными A и B соотношениями:

$$\alpha_1 = -\frac{\sqrt{2\gamma n \cos \eta}\, A + k_3 B}{\sqrt{2d(d+k_0)}} \sin \frac{\eta}{2} \qquad \beta_1 = A \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_0}{d}\right)} \cos \frac{\eta}{2} \tag{5}$$

$$\alpha_2 = B \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_0}{d}\right)} \cos \frac{\eta}{2} \qquad \beta_2 = \frac{-\sqrt{2\gamma n \cos \eta}\, B + k_3 A}{\sqrt{2d(d+k_0)}} \sin \frac{\eta}{2}$$

$$\alpha_3 = B \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_0}{d}\right)} \sin \frac{\eta}{2} \qquad \beta_3 = \frac{-\sqrt{2\gamma n \cos \eta}\, B + k_3 A}{\sqrt{2d(d+k_0)}} \cos \frac{\eta}{2}$$

$$\alpha_4 = -\frac{\sqrt{2\gamma n \cos \eta}\, A + k_3 B}{\sqrt{2d(d+k_0)}} \cos \frac{\eta}{2} \qquad \beta_4 = A \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_0}{d}\right)} \sin \frac{\eta}{2}.$$

Здесь введены обозначения

$$d = \frac{K - k_1 \sin \eta}{\cos \eta}, \quad K = k_1 \sin \eta + \cos \eta \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 2\gamma n \cos \eta},$$

$$k_0 = \frac{mc}{\hbar}. \tag{6}$$

Функция (3) нормирована на единицу, если A и B удовлетворяют условию

$$AA^+ + BB^+ = 1. \tag{7}$$

Помимо трех интегралов движения (2) должен существовать четвертый, спиновый интеграл движения. Как установлено в [1], в качестве такого интеграла движения можно выбрать либо оператор поперечной поляризации спина электрона

$$L(\psi) = \Pi_2 \sin \eta \sin \psi + \Pi_3 \cos \psi + \mathrm{E}_2 \sin \eta \cos \psi - \mathrm{E}_2 \sin \psi, \tag{8}$$

либо оператор продольной поляризации

$$\mathbf{T}(\psi) = (\vec{\sigma}\vec{\mathbf{P}}) \sin \psi + T_3 \cos \psi - T_1 \sin \eta \sin \psi. \tag{9}$$

В обеих формулах ψ — произвольный угол и введены матричные векторы

$$\vec{\Pi} = mc\vec{\sigma} + \rho_2 [\vec{\sigma}\vec{\mathbf{P}}], \quad \mathbf{E} = -\rho_2 [\vec{\sigma}\vec{\mathbf{P}}], \quad \mathbf{T} = mc\rho_3\sigma + \rho_1 \mathbf{P}. \tag{10}$$

Если потребовать, в дополнение к (2), чтобы Ψ удовлетворяла уравнению

$$L(\psi)\Psi = \zeta \hbar \lambda_1 \cos \eta \Psi, \quad \zeta = \pm 1,$$

то получим с учетом (7)

$$A = \zeta \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \zeta q_1)}\, e^{-i\frac{\Phi}{2}}, \qquad q_1 = \frac{d(d+k_0) - k_3^2}{\lambda_1 (d+k_0)} \cos \psi \tag{11}$$

$$B=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\zeta q_1)}\,e^{i\frac{\Phi}{2}},\qquad \operatorname{tg}\Phi=\frac{d+k_0}{k_3}\operatorname{tg}\psi$$

$$\lambda_1\cos\eta=\sqrt{(K-k_1\sin\eta)^2-\cos^2\eta\,(k_3^2+k_0^2\sin^2\psi)}.$$

Для продольной поляризации, подчиняя функцию Ψ уравнению

$$T(\psi)\Psi=\zeta\hbar\lambda_2\Psi,\quad \zeta=\pm 1,$$

получим

$$A=-\zeta\delta\sqrt{\frac{1}{2}(1+\zeta q_2)},\qquad \delta=\frac{(d+k_0)\cos\eta\sin\psi+k_3\cos\psi}{|(d+k_0)\cos\eta\sin\psi+k_3\cos\psi|},$$

$$B=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\zeta q_2)},\quad q_2=\frac{(d+k_0)(k_0\cos\psi+k_3\cos\eta\sin\psi)+k_3^2\cos\psi}{\lambda_2(d+k_0)},$$

$$\lambda_2=\sqrt{k_0^2(\cos^2\psi-\cos^2\eta\sin^2\psi)+[(K-k_1\sin\eta)\sin\psi+k_3\cos\psi]^2}.$$

Аномальный магнитный момент электрона и прецессия спина

Наличие аномального магнитного момента у электрона приводит к тому, что набор спиновых интегралов движения резко сужается (см. [1]). Действительно, как показал Паули [2], аномальный магнитный момент электрона можно учесть, видоизменив гамильтониан (1)

$$\mathrm{H}=c(\vec{\alpha}\vec{\mathbf{P}})+\rho_3 mc^2-e\varphi+\hbar c\mu\,[\rho_3(\vec{\sigma}\vec{\mathbf{H}})+\rho_2(\vec{\sigma}\vec{\mathbf{E}})],\tag{12}$$

где $\hbar c\mu$ — аномальная часть момента электрона. Операторы (2) и в этом случае остаются интегралами движения. Однако оператор $T(\psi)$ (см. (9) не коммутирует с (12) ни при каком значении ψ. Оператор (9) поперечной поляризации $L(\psi)$ коммутирует с (12) лишь при $\psi=0$, если вектор $\vec{\Pi}$ определить, в отличие от (10), следующим образом

$$\vec{\Pi}=mc\vec{\sigma}+\rho_2[\vec{\sigma}\vec{\mathbf{P}}]+\hbar\mu(\vec{\mathbf{H}}-[\vec{\sigma}\vec{\mathbf{E}}]).$$

Формулы (3—6) сохраняют свой вид, если для энергии K пользоваться выражением ($\zeta'=\pm 1$ собственное число $L(0)$)

$$K_{\zeta'}=k_1\sin\eta+\cos\eta\sqrt{k_3^2+(\sqrt{k_0^2+2\gamma h\cos\eta}+\zeta'\mu H\cos\eta)^2}.$$

Величины A и B определяются формулами (11) при $\psi=0$. Заранее не очевидно, как будет с течением времени меняться спин, описываемый операторами (8) и (9), сохранявшийся без учета аномального момента.

Для решения этого вопроса поступим следующим образом. Из волновых функций $\Psi_{\zeta'}(t)$, являющихся собственными для оператора $L(0)$ с учетом аномального момента электрона, построим нестационарную ($K_{\zeta'}\neq K_{-\zeta'}$) волновую функцию

$$\Psi(t)=C(\zeta,\zeta')\Psi_{\zeta'}(t)+C(\zeta,-\zeta')\Psi_{-\zeta'}(t)$$

так, чтобы при $t=0$ она была собственной для оператора $L(\psi)$ (либо $T(\psi)$).

$$L(\psi)\Psi(0)=\zeta\hbar\lambda_1\cos\eta\Psi(0).\tag{13}$$

Если потребовать, чтобы $\Psi(t)$ была нормирована на единицу, то из (13) коэффициенты $C(\zeta,\zeta')$ определятся однозначно. Определив таким образом $\Psi(t)$, найдем среднее значение $\overline{L(\psi)}$ (либо $\overline{T(\psi)}$) по этим функциям. Это среднее значение будет, в общем случае, зависеть от времени. Следовательно, задача о прецессии спина под влиянием аномального момента электрона будет решена. Несложные, но громоздкие расчеты приводят для оператора $L(\psi)$ к следующему выражению:

$$C(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2}\left\{\zeta\zeta' \sqrt{(1+\zeta q_1)(1+\zeta' q')}\, e^{-i\frac{\Phi}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(1-\zeta q_1)(1-\zeta' q')}\, e^{i\frac{\Phi}{2}}\right\}, \quad q' = q_1(\psi = 0),$$

а для продольной поляризации (оператор $T(\psi)$) к коэффициентам

$$C(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2}\left\{\zeta\zeta' \sqrt{(1+\zeta q_2)(1+\zeta' q'} + \sqrt{(1-\zeta q_2)(1-\zeta' q')}\right\}, \quad q' = q_2(\psi = 0).$$

Среднее значение $\overline{L(\psi)}$ по функциям $\Psi(t)$ имеет вид

$$\overline{L(\psi)} = \zeta\hbar\lambda_1 \cos\eta\,(\cos^2 s + \sin^2 s \cos\Omega t), \quad \Omega = c\,(K_1 - K_{-1}), \tag{14}$$

где нужно положить

$$\cos s = q_1 q' - \sqrt{(1-q_1^2)(1-q'^2)} \cos\Phi.$$

Для величины $\overline{T(\psi)}$ формула (14) сохраняет свой вид, если заменить в ней $\lambda_1 \cos\eta \to \lambda_2$ и положить

$$\cos s = q_2 q' + \sqrt{(1-q_2^2)(1-q'^2)}. \tag{15}$$

Из формул (14) и (15) в частном случае $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\eta = 0$ следует результат работ [3, 4].

С точностью до членов, линейных по μ, имеем

$$\Omega = 2c\mu H \cos^2\eta \sqrt{1-\beta_3^2} = \omega_0 \frac{H}{H_0} \cos^2\eta \sqrt{1-\beta_3^2}, \quad \beta_3 = \frac{k_3 \cos\eta}{K - k_1 \sin\eta}$$

$$\omega_0 = 2ck_0 = 2{,}472 \cdot 10^{20} \text{ герц}, \quad H_0 = \frac{k_0}{\mu} = 7{,}707 \cdot 10^{16} \text{ } oe.$$

Таким образом, для полей $H \sim 10^4$ *ое* частота $\Omega \sim 10^8$ *герц*, что может даже превышать частоту обращения электронов в ускорителях. Следовательно, несмотря на малую величину аномального магнитного момента электрона, его влияние на поведение спина при движении электрона в скрещенных полях может быть весьма существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. А. Бордовицын. Известия вузов, «Физика», 4, 41, 1967.
2. W. Pauli. Rev. of Mod. Phys. 13, 203, 1941.
3. И. М. Тернов, В. С. Туманов. Известия вузов, «Физика», 1, 155, 1960.
4. И. М. Тернов, В. Г. Багров, Р. А. Рзаев, Ю. И. Клименко. Известия вузов, «Физика», 6, 111, 1964.