

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАХВАТА ЧАСТИЦ В УСКОРЕНИЕ В СИНХРОТРОНЕ СО СЛАБОЙ ФОКУСИРОВКОЙ

В. В. ЦЫГАНКОВ

(Представлена научным семинаром НИИЯФЭА)

Решение уравнения движения частиц в ускорителе можно представить в виде:

$$x = x_{\text{св}} + x_{\text{воз}},$$

где $x_{\text{св}}$ — свободные колебания, определяемые типом системы и начальными условиями, $x_{\text{воз}}$ — возмущение свободного движения, зависящее от величины и вида правой части неоднородного уравнения. В ускорителях со слабой фокусировкой преобладает $x_{\text{св}}$, так как размеры камеры велики, а в ускорителях с жесткой фокусировкой $x_{\text{воз}}$ сравнимо с $x_{\text{св}}$. Известно, что системы автоматического управления осуществляют компенсацию $x_{\text{воз}}$, поэтому применение систем автоматической компенсации возмущений, работающих в течение цикла ускорителя, особенно эффективно в ускорителях с жесткой фокусировкой на сверхвысокие энергии [2]. Пример эффективного применения систем автоматической компенсации возмущений радиально-фазовых колебаний центра сгустка в синхрофазотроне со слабой фокусировкой на энергию 10 Гэв ОИЯИ г. Дубна [3] объясняется необходимостью перезахвата в режим краткого ускорения и наличием гармоник магнитного поля, частота которых находится в области синхротронных частот. Таким образом, в ускорителе со слабой фокусировкой может быть эффективна система автоматической оптимизации условия захвата, так как на уровне инжекции характеристики магнитного поля, а также пучка инжектируемых частиц не остаются постоянными от цикла к циклу ускорения. Схема исследования систем автоматической оптимизации следующая: на основе экспериментальных или теоретических исследований строится математическая модель объекта и в зависимости от сложности модели синтез системы производится методами теории оптимального управления или с использованием вычислительной техники [4]. Можно указать на два крайних случая: 1 — сведения о физических процессах настолько незначительны, что экспериментатор вынужден в ограниченной области изменения переменных зависимость между выходной величиной и входными представить в виде полинома Чебышева, коэффициенты которого определяются по данным пассивного эксперимента; 2 — существует теоретическая модель, основанная на точном знании физического процесса. В первом случае сведения о функциональной форме сводятся к нулю [5, 6, 7], во втором случае она известна достоверно. На практике чаще всего встречаются промежуточные случаи. Теория, как правило, разработана недостаточно,

но путем проведения дополнительных исследований исследователь рассчитывает при помощи итерационного метода построить модель, в которой принимаются во внимание основные теоретические аспекты проблемы. На практике преобладает излишне осторожный подход к построению модели. Считается, что до тех пор, пока функциональная форма не известна с большой степенью точности, теоретический подход является необоснованным. Это приводит к преобладанию во многих случаях чисто эмпирических исследований, в то время как полутеоретический подход, в котором функциональная форма строится при помощи итерационного процесса, может оказаться более эффективным и результативным [5].

Данная работа посвящена некоторым вопросам построения математической модели процесса захвата частиц в ускорение для синхротронов на основе исследования физики этого явления.

Рассматривается многооборотная инжекция частиц в синхротрон. При этом делаются следующие допущения: n — показатель спада магнитного поля по радиусу — постоянный по азимуту и радиусу ускорителя; не учитываются коллективные взаимодействия частиц при инжекции.

Решение уравнений бетатронных колебаний для ускорителей типа рейстоек на азимуте инфлектора σ имеет вид [1]:

$$x_k = F_c(\sigma) \cdot \cos(4\mu k + \alpha(\sigma)), \quad (1.1)$$

где

$$F_c(\sigma) = 2 |D \cdot \sin \sigma + dD \cdot \cos \sigma|, \\ \alpha(\sigma) = \arg(D \cdot \sin \sigma + dD \cdot \cos \sigma), \quad (1.2)$$

$$D = \frac{\frac{R\gamma}{x} d^* - x_0}{d^* - d}, \quad d = \frac{c - e^{i\mu}}{s}, \quad d^* = \frac{c - e^{-i\mu}}{s}, \quad c = \cos \frac{\pi x}{2},$$

$$s = \sin \frac{\pi}{2} x, \quad \mu = \arccos(c - ps), \quad p = \frac{l x}{2R}, \quad \sigma = \frac{S}{R}, \quad x = \sqrt{1 - n},$$

S — расстояние от края сектора до инфлектора по направлению движения частиц; R — радиус равновесной орбиты, l — длина прямолинейного промежутка, γ — угол между направлением вылета частицы и касательной к равновесной орбите в месте, где установлен инфлектор. С учетом (1.2) уравнение (1.1) можно представить в виде:

$$x_k = x_0 \cdot B(\kappa) + \frac{\gamma R}{x} A(\kappa), \quad (1.3)$$

где

$$A(\kappa) = a \cdot \cos 4\mu\kappa + \frac{s(b + pa) + 2pbc}{\sin \mu} \cdot \sin 4\mu\kappa, \quad (1.4)$$

$$B(\kappa) = b \cdot \cos 4\mu\kappa - \frac{s(a + pb)}{\sin \mu} \cdot \sin 4\mu\kappa,$$

$$a = \sin \sigma, \quad b = \cos \sigma,$$

x_0 — расстояние от точки вылета частицы до мгновенной орбиты, x_k — значение x на k -м обороте ($\kappa = 1, 2, 3, \dots$). В выражении (1.3) $A(\kappa)$ и $B(\kappa)$ аналогичны эффективному „синусу“ и „косинусу“ [8], однако, не совпадают с ними, так как в (1.3) выделены отдельно x_0 и $\frac{\gamma R}{x}$. При $p = 0$, $A(\kappa) = \sin 4\mu\kappa$, $B(\kappa) = \cos 4\mu\kappa$, а σ при этом сле-

дует считать равным нулю. При $p \neq 0$ и $\sigma \neq 0$ получим выражение для x_k совпадающее с ρ_k [9].

Будем далее рассматривать соударение частиц только с инфлектором, учет соударений с вертикальными стенками повлияет только на абсолютное значение захваченного заряда. Условие обхода частицей инфлектора имеет вид:

$$(g + u) \cdot B(\kappa) + \frac{\gamma R}{\kappa} \cdot A(\kappa) \leq \Delta R_{об} \cdot \kappa + u, \quad (1.5)$$

где u — расстояние от внутренней пластины инфлектора до мгновенной орбиты, g — расстояние от внутренней пластины до точки вылета частицы из инфлектора (толщиной пластины пренебрегаем), $\Delta R_{об} = \left| \frac{dR}{dt} \right| \cdot T$ — сжатие мгновенной орбиты на оборот, $\left| \frac{dR}{dt} \right|$ — скорость сжатия мгновенной орбиты, T — период обращения. Из (1.5) следует:

$$1) \quad g_1(\kappa) \leq \frac{1 - B(\kappa)}{B(\kappa)} \cdot u - \frac{A(\kappa)}{B(\kappa)} \cdot \frac{R}{\kappa} \cdot \gamma + \frac{\kappa}{B(\kappa)} \cdot \Delta R_{об}, \quad (1.6)$$

если $B(\kappa) > 0$.

$$2) \quad g_2(\kappa) \geq \frac{1 - B(\kappa)}{B(\kappa)} \cdot u - \frac{A(\kappa)}{B(\kappa)} \cdot \frac{R}{\kappa} \cdot \gamma + \frac{\kappa}{B(\kappa)} \cdot \Delta R_{об}, \quad (1.7)$$

если $B(\kappa) < 0$.

В (1.6) и (1.7) для фиксированных значений $\Delta R_{об}$, γ , u среди $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ найдем такое значение $\kappa = \kappa'$, при котором $g_1(\kappa')$ минимальное, и введем обозначение $g_1(\kappa') = g_{\min}(u)$, и такое значение $\kappa = \kappa''$, при котором $g_2(\kappa'')$ максимально. Тогда область инфлектора, вылетев из которой частицы не столкнутся с инфлектором, равна $(g_2(\kappa''), g_1(\kappa'))$ с учетом неравенства

$$0 \leq g_2(\kappa'') \leq g_1(\kappa') \leq g_{\max}, \quad (1.8)$$

где $g_{\max}$ — ширина инфлектора.

Аналитические методы исследования функции $g(\kappa)$ дискретного аргумента κ отсутствуют, поэтому операцию нахождения κ' и κ'' приходится выполнять численно.

Рассмотрим инжекцию параллельного пучка частиц ($\gamma = 0$), тогда случай (1.7) отпадает, так как при $B(\kappa) < 0$ неравенство (1.5) всегда выполняется, и из (1.6) получаем:

$$g_{\min}(u) = g_1(\kappa') = \frac{1 - B(\kappa')}{B(\kappa')} \cdot u + \frac{\kappa'}{B(\kappa')} \cdot \Delta R_{об}. \quad (1.9)$$

Пусть мгновенная орбита находилась на расстоянии u от внутренней пластины инфлектора, когда в камеру ускорителя был инжектирован заряд $I(t) dt$, где $I(t)$ ток инжектора. Заряд, захваченный на орбиту u , равен:

$$dQ = q(u) du = \int_0^{g_{\min}(u)} q(g) dg, \quad (1.10)$$

где $g_{\min}(u)$ определяется выражением (1.9),

$q(g)$ — функция распределения инжектируемого заряда по ширине инфлектора. В случае равномерного распределения инжектируемого заряда по g : $q(g) = \frac{I(t) dt}{g_{\max}}$. Вместо переменной t введем u : $dt =$

$\frac{du}{\left| \frac{dR}{dt} \right|}$, тогда из (1.10) следует, что функция распределения заряда

Таблица 1

$\Delta R_{ob} [см]$					
n	0,05	0,10	0,15	0,29	0,5
0,50	1,5	1,5	15	1,5	1,0
0,51	1,5	1,5	15	1,0	1,0
0,52	1,5,9	1,5,9	1,5,9	1,0	1,0
0,53	1,4,13	1,4,13,0	1,4,0	1,0	1,0
0,54	1,4	1,4	1,4	1,4,0	1,0
0,55	1,4	1,4	1,4	1,4	1,0
0,56	1,4	1,4	1,4	1,4	0
0,57	4	4	4	4	0
0,58	4 11	4,11	4	4,0	0
0,59	4,7	4,7	4,7	0	0
0,60	4,7	4,7	4,7	0	0
0,61	3,10	3,10,	3,10,0	3,0	0
0,62	3,13,16	13,16	3,0	3,0	0
0,63	3	3	3	3,0	0
0,64	3	3	3	3	0
0,65	3	3	3	3	3,0

Таблица 2

$\Delta R_{ob} [см]$				
n	0,2	0,4	0,8	1,2
0,58	7,0	3,0	0	0
0,59	3,0	3,0	0	0
0,60	3,0	3,0	3,0	0
0,61	3,0	3,0	3,0	0
0,62	3	3	3	0
0,63	3	3	3	0
0,64	3	3	3,0	0
0,65	3	3,0	3,0	0
0,66	3,11	3,0	3,0	0
0,67	3,8	3,0	0	0
0,68	3,5,8,13	3,0	0	0
0,69	3,5	3,5,0	0	0
0,70	5	5	0	0
0,71	5,0	5,0	0	0
0,72	2,7,0	2,0	0	0
0,73	2,7	2,0	2,0	0
0,74	2,9	2,0	2,0	0
0,75	3,11	2,0	2,0	2,0

по координате u или амплитудам бетатронных колебаний (так как $\gamma = 0$) равна:

$$q(u) = \frac{I(u) \cdot g_{\min}(u)}{\left| \frac{dR}{dt} \right| \cdot g_{\max}},$$

где $I(u)$ — ток инжектора как функция длительности импульса инжекции. Из (1.2) следует, что при $I(u) = I = \text{const}$ функция распределения частиц по координате u после первого этапа инжекции, который

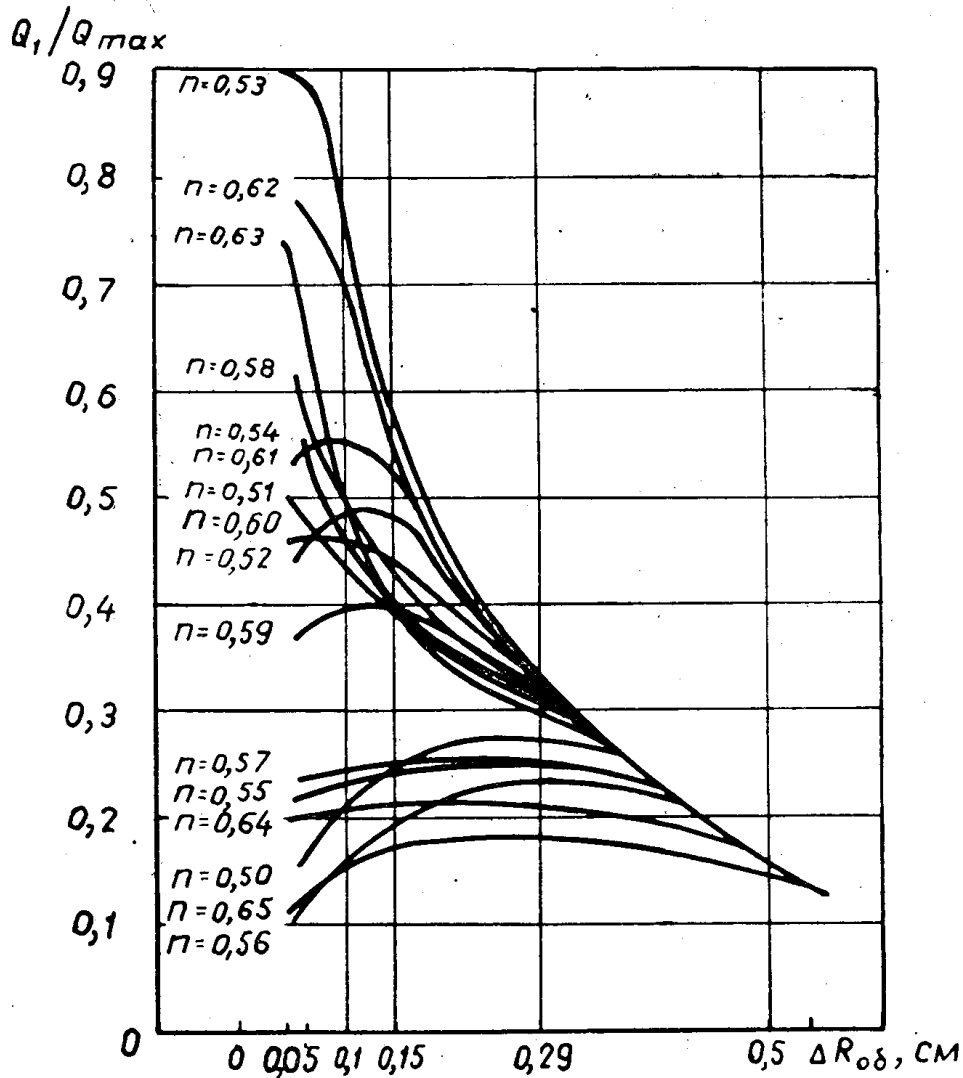


Рис. 1. Зависимость захваченного на первом этапе инжекции заряда для параллельного пучка частиц от $\Delta R_{об}$ и n для синхротрона 1,5 ГэВ ТПИ

длится до момента включения в. ч. поля, с точностью до постоянной совпадает с $g_{\min}(u)$. Заряд, захватываемый на 1-м этапе инжекции, равен:

$$Q_1 = \int_0^{u_{\max}} \int_0^{g_{\min}(u)} q(g) dg du = \frac{I}{\left| \frac{dR}{dt} \right| \cdot g_{\max}} \times$$

$$\times \left(\frac{1 - B(\kappa')}{B(\kappa')} \cdot \frac{u_{\max}^2}{2} + \frac{\Delta R_{об} \cdot \kappa'}{B(\kappa')} \cdot u_{\max} \right), \quad (1.12)$$

где $u_{\max}$ — полуширина рабочей области магнитного поля по радиусу.

По данной методике был проведен расчет значений κ^1 (табл. 1, 2) и Q_1 (рис. 1, 2) в зависимости от $\Delta R_{об}$ и n для случая инжекции параллельного пучка частиц в синхротрон 1,5 ГэВ Томского политехнического института и в синхрофазотрон 10 ГэВ ОИЯИ г. Дубна. Из рис. 1, 2, табл. 1, 2 видно, что в области малых значений $\Delta R_{об}$, заряд, захваченный на первом этапе инжекции, существенно зависит от показателя

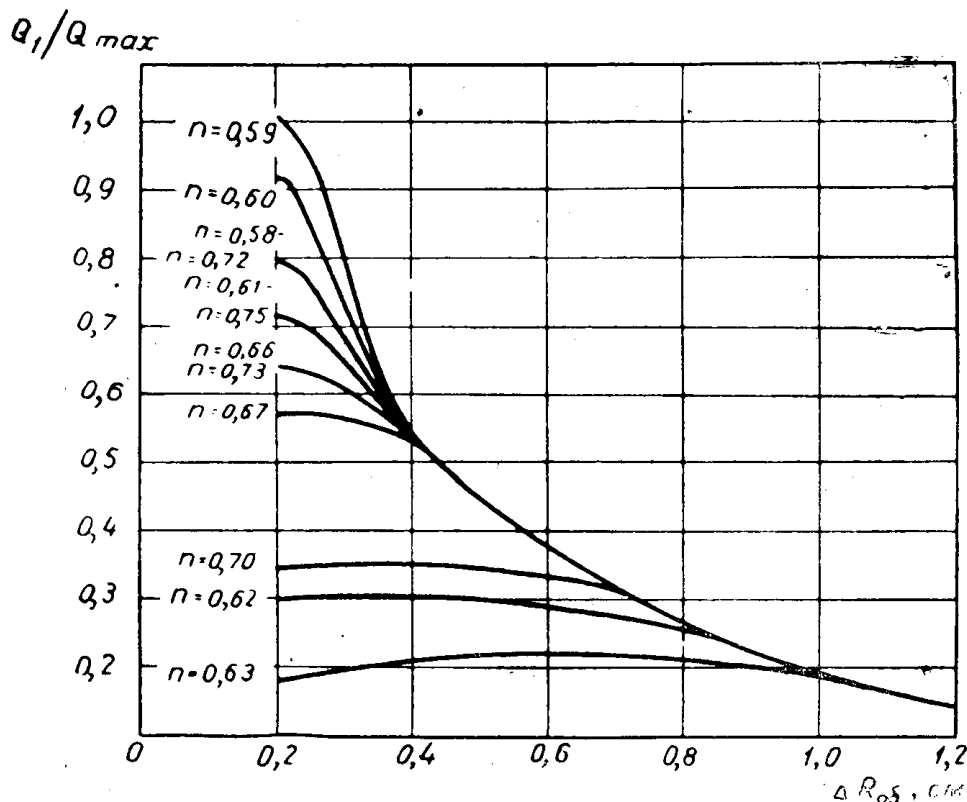


Рис. 2. Зависимость захваченного на первом этапе инжекции заряда для параллельного пучка от $\Delta R_{об}$ и n для синхрофазотрона 10 ГэВ ОИЯИ г. Дубна

спада магнитного поля, причем эта зависимость сильнее выражена в случае, если инфлектор находится в середине сектора. По-видимому, колебания захваченного заряда в 1,5–2 раза на синхротроне 680 МэВ Физического института АН СССР можно объяснить также и соударениями частиц с инфлектором из-за неустойчивости n .

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Рабинович. Основы теории синхрофазотрона. Труды ФИ АН СССР, т. X, 1958.
2. А. Л. Минц, А. А. Васильев, Э. Л. Бурштейн. Кибернетический ускоритель на энергию 1000 ГэВ. Международная конференция по ускорителям заряженных частиц г. Дубна, 1963.
3. Г. С. Казанский, А. П. Царенков. Подавление фазовых колебаний сгустка протонов в синхрофазотроне на 10 ГэВ. ОИЯИ г. Дубна, препринт 2491, 1965.
4. В. П. Тарасенко. Влияние помех на дискретные системы автоматической оптимизации (обзор). Изв. АН СССР ОТН «Техническая кибернетика», 1963, № 2.
5. G. E. P. Box and Hunter. «Technometrics». 1962, v. 4, № 3, p. 301–318.
6. Haisman F. «I. Operat. Res. Soc. Japan». 1964, 6, № 4, p. 200–207.
7. В. В. Налимов, Н. А. Чернова. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. Изд-во «Наука», М., 1965.
8. В. И. Котов, Н. Б. Рубин. ЖТФ, т. 28, в. 2, 1958.
9. Н. Б. Рубин, О. И. Ярковский. Особенности захвата частиц в синхрофазотроне режим ускорения. Дубна, препринт p-649, 1961.