ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 184 1970

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕМЕЙСТВА $K(3,7)$ в P_3

В. И. МАТВЕЕНКО

(Представлена кафедрой высшей математики)

В настоящей статье в трехмерном проективном пространстве рассматривается семейство $K(3, 7)$ — семипараметрическое семейство невырожденных коник, плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство. Это семейство коник существует с произволом одной функции семи аргументов. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] — [5]. Индексы принимают следующие значения; $i, j, k, g, t = 1, 2$; $i \neq j$; $k \neq t$; $m, n, r = 1, 2, 3$; $m \neq n$; $m \neq r$; $n \neq r$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$; $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $\sigma = i + 3$; $\varkappa = j + 3$; $\xi = 5 + i$; $\eta = 5 + j$. По i, j, g, r, α не суммировать!

Поместим вершины A_1 и A_2 подвижного репера $\{A_\alpha\}$ в различные точки коники C, вершину A_3 — в полюс прямой A_1A_2 относительно коники C, вершину A_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где ω_α^β — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta], \tag{2}$$

Уравнения коники C относительно этого репера имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \ x^4 = 0, \ p \neq 0. \tag{3}$$

Произведем частичную нормировку вершин репера $\{A_\alpha\}$, положив $p = 1$. Формы

$$\omega_n^4, \ \omega_i^j, \ \omega_3^j - \omega_i^3, \ \omega_k^k - 2\omega_3^3$$

являются главными формами. Выберем из них за базисные

$$\omega_n = \omega_n^4, \ \omega_\sigma = \omega_i^j, \ \omega_\xi = \omega_3^j - \omega_i^3.$$

Оставшаяся главная форма выразится через них в виде

$$\omega_k^k - 2\omega_3^3 = \Gamma^\lambda \omega_\lambda. \tag{4}$$

Из этого уравнения обычным путем [1] получается следующая система дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта $\Gamma_1 \{\Gamma^\lambda\}$:

$$\delta\Gamma^i = \Gamma^i(\pi_4^4 - \pi_i^i) - \Gamma^3\pi_3^i + \Gamma^\sigma\pi_4^j - \Gamma^\xi\pi_4^3 - \pi_4^i - \Gamma^i \sum_k \Gamma^{k+5} \pi_k^3,$$

$$\delta\Gamma^{\sigma} = \Gamma^{\sigma}(\pi_j^j - \pi_i^i) - \Gamma^{\xi}(\pi_3^i + \pi_j^3) - \Gamma^{\sigma}\sum_k \Gamma^{k+5}\pi_k^3,$$

$$\delta\Gamma^{\xi} = \Gamma^{\xi}(\pi_j^j - \pi_3^3) - \Gamma^{\sigma}\pi_3^j - \Gamma^{\xi}\sum_k \Gamma^{k+5}\pi_k^3, \tag{5}$$

$$\delta\Gamma^{3} = \Gamma^{3}(\pi_4^4 - \pi_3^3) + 2\pi_4^3 - \Gamma^{k}\pi_k^3 + \sum_k \Gamma^{k+5}(\pi_4^t - \Gamma^3\pi_k^3).$$

Эта система уравнений дает возможность произвести следующую фиксацию репера:

$$\Gamma^4 = \Gamma^5 = 0,\ \Gamma^6 \neq 0,\ \Gamma^7 \neq 0. \tag{6}$$

Формы ω_3^i и ω_i^3 становятся главными формами и можно записать их разложение по базисным формам в виде

$$\omega_3^i = \Gamma_3^{i\lambda}\omega_\lambda,\quad \omega_i^3 = \Gamma_3^{j\lambda}\omega_\lambda - \omega_\xi. \tag{7}$$

Выясним геометрический смысл фиксации (6). Голономное подмногообразие Ψ_4^* [5] коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники C неподвижна. Из рассмотрения системы уравнений

$$\begin{gathered}(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ x^n\omega_n = 0,\\ \Gamma^\lambda\omega_\lambda x^1x^2 + \sum_k\left[\omega_{k+3}(x^k)^2 + \omega_{k+5}x^kx^3\right] = 0\end{gathered} \tag{8}$$

для определения точек пересечения исходной и смежной коник семейства $K(3,7)$ вытекает следующее предложение: среди подмногообразий Ψ_1 [5] коник

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \omega_4 : \omega_5 : \omega_6 : \omega_7 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4, \tag{9}$$

принадлежащих подмногообразию Ψ_4^* коник, существует в общем случае 480 таких подмногообразий Ψ_1 коник, для каждого из которых коника C имеет четырехкратную характеристическую точку $M_u (u = 1, 2, 3, \ldots, 480)$. При фиксации (6) вершины A_i репера $\{A_\alpha\}$ помещаются в точки M_i. Подмногообразие Ψ_1^i коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_\varkappa = \omega_6 = \omega_7 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_j является четырехкратной характеристической точкой коники C, плоскость которой для этого подмногообразия неподвижна. Подмногообразие Ψ_1^{i+2} коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_\eta = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники неподвижна, а точки A_1 и A_2 являются характеристическими точками, причем точка A_j—двухкратной характеристической точкой, коники C. Выбором базисных форм ω_λ исключаются случаи, когда размерность многообразия плоскостей коник меньше трех, когда точки A_i становятся двухкратными характеристическими точками коники C подмногообразий Ψ_1^{i+2} коник, когда характеристические точки коники C для подмногообразий Ψ_1^i становятся неопределенными.

Из системы уравнений (7) обычным путем получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего продолженного фундаментального объекта $\Gamma_2\{\Gamma_1, \Gamma_3^{i\lambda}\}$ [1]:

$$\begin{aligned}&\delta\Gamma_3^{gi} = \Gamma_3^{gi}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_g^g - \pi_i^i) + \Gamma_3^{g\sigma}\pi_4^j - \Gamma_3^{g\xi}\pi_4^3,\\ &\delta\Gamma_3^{i3} = \Gamma_3^{i3}(\pi_4^4 - \pi_i^i) + (\Gamma_3^{i\eta} - 1)\pi_4^i + \Gamma_3^{i\xi}\pi_4^j,\\ &\delta\Gamma_3^{i\sigma} = \Gamma_3^{i\sigma}(\pi_j^j - 2\pi_i^i + \pi_3^3),\quad \delta\Gamma_3^{i\xi} = \Gamma_3^{i\xi}(\pi_j^j - \pi_i^i),\\ &\delta\Gamma_3^{i\varkappa} = \Gamma_3^{i\varkappa}(\pi_3^3 - \pi_j^j),\quad \delta\Gamma_3^{i\eta} = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Так как эта система уравнений алгебраически разрешима относительно всех независимых вторичных форм $\overline{\pi}_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \pi_4^4$, то объект Γ_2 является основным [1]. Из систем уравнений (5) и (10) непосредственно замечаем, что величины Γ^ξ, $\Gamma^{k\sigma}$, $\Gamma_3^{l\xi}$ являются относительными инвариантами. Условие $\Gamma^\xi = 0$ характеризует семейство коник, для которого точка A_j является трехкратной характеристической точкой коники C подмногообразия Ψ_1^{i+2}. Условие $\Gamma_3^{k\sigma} = 0$ $[\Gamma_3^{i\xi} = 0]$ характеризует семейство коник, для которого касательная l^σ $[l^\xi]$ к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}$ $[(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega_5=\omega_\eta=0}]$ совпадает с прямой A_3A_t $[A_3A_j]$.

Величины

$$\Gamma_3^{j\xi},\ E = (\Gamma_3^{j\sigma} - 1)\Gamma_3^{i\chi},\quad L_i = \frac{\Gamma_3^{i\xi}}{(\Gamma^\xi)^2 \Gamma_3^{j\xi}},\qquad H_i = \Gamma^\eta \Gamma_3^{j\sigma}$$

являются абсолютными инвариантами. Геометрически они характеризуются через сложные отношения четверок точек следующим образом:

$$E = -(A_jA_3;\ B_i^\sigma B^j),\quad \Gamma_3^{j\xi} = \frac{1}{1 + (A_iA_j;\ B_\xi B_3^\xi)},$$
$$H_i = (A_iA_3;\ M_{jj}B^i),\ L_i = \frac{1}{2}(A_iA_j;\ M_{i3}B_3^\sigma), \tag{11}$$

где B_3^σ $[B_3^\xi]$ — точка пересечения прямых A_1A_2 и l^σ $[l^\xi]$, B_i^σ — точка пересечения прямой A_jA_3 с касательной l_i к линии $(A_i)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}$, B^i — точка огибающей семейства прямых $(A_iA_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}$, M_{ir} — проекция из точки A_r на прямую A_mA_n характеристической точки $M^i = (\Gamma^\xi)^2 A_i + 2A_j - 2\Gamma^\xi A_3$ коники C подмногообразия Ψ_1^{i+2} коник. Используя выражения (11), получаем следующие равенства:

$$(A_1A_3B_2^5B^1) = (A_2A_3;\ B_1^4B^2),\ (A_1A_2;\ B_3^\sigma B_\sigma) = -1,$$
$$(A_1A_3M_{12}B^1)\ A_2A_3; M_{11}B^2) = -2(A_1A_3;\ B_2^5B^1),$$
$$(A_iA_3;\ M_{jj}B^i) = -2(A_jA_3;\ B_i^\sigma M_{ji}),$$

где B_σ $[B_\xi]$ — точка огибающей семейства прямых

$$(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}\ [(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega_5=\omega_\eta=0}].$$

Система уравнений (10) дает возможность произвести следующую фиксацию репера:

$$\Gamma_3^{i3} = 1,\quad \Gamma_3^{i3}\Delta + \sum_k \Gamma_3^{i,k+5}\Delta_k = 0,$$
$$\sum_k [a\Gamma_3^{ik} + a_{k+5}^k(\Gamma_3^{i,k+5} - 1) + a_{k+5}^i \Gamma_3^{k,k+5}] = 0, \tag{12}$$

где

$$a = \Gamma_3^{16}\Gamma_3^{27} - \Gamma_3^{26}\Gamma_3^{17} \neq 0,\quad a_\xi^k = \Gamma_3^{jk}\Gamma_3^{i\eta} - \Gamma_3^{ik}\Gamma_3^{j\eta},$$
$$\Delta = (\Gamma_3^{26} - 1)(\Gamma_3^{17} - 1) - \Gamma_3^{16}\Gamma_3^{27} \neq 0,\quad \Delta_i = \Gamma_3^{i3}\Gamma_3^{j\eta} - \Gamma_3^{j3}(\Gamma_3^{i\eta} - 1).$$

Учитывая еще условие эквипроективности $(A_1A_2A_3A_4) = 1$, получаем, что все вторичные параметры зафиксированы и репер $\{A_\alpha\}$ становится каноническим. Обозначим через l_3 касательную к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega_5=\omega_1^3=\omega_2^3=0}$, через b_i касательную плоскость к голономной поверхности $(A_i)_{\omega_j=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_3^1=\omega_3^2=0}$, а через R_i точку пересечения прямой l_3 с плоскостью b_i. Подмногообразие Ψ_1 коник $\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega_5=\omega_1^3=\omega_2^3=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки A_i неподвижны. Голономное подмногообразие Ψ_2 коник $\omega_j=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_3^1=\omega_3^2=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_3 и прямая A_jA_3 неподвижны. При фиксации (12) точка A_4 выбирается на прямой l_3 так, что $(R_1R_2;\ A_3A_4)=-1$. Если точки R_1 и R_2 совпадают, то точка A_4 совпадает с ними. При фиксации $\Gamma_3^{i3}=0$ исключается случай совпадения точки $Q=\Gamma_3^{13}A_1-\Gamma_3^{23}A_2$ ребра возврата торса $(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega_5=\omega_6=\omega_7=0}$ с точками A_j. А неравенство $a\neq 0$ исключает случай совпадения прямых l^6 и l^7.

Деривационные формулы построенного канонического репера имеют вид:

$$
\begin{gathered}
dA_i=\Gamma_i^{i\lambda}\omega_\lambda A_i+\omega_\sigma A_j+(\Gamma_3^{j\lambda}\omega_\lambda-\omega_\xi)\,A_3+\omega_i A_4,\\
dA_3=\Gamma_3^{n\lambda}\omega_\lambda A_n+\omega_3 A_4,\quad dA_4=\Gamma_4^{\beta\lambda}\omega_\lambda A_\beta
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где

$$
\Gamma_\beta^{\beta\lambda}=0,\ \ (\Gamma_k^{k6}-2\Gamma_3^{36})\,\Gamma_3^{15}=(\Gamma_k^{k7}-2\Gamma_3^{37})\,\Gamma_3^{24}.
$$

Используя построенный канонический репер $\{A_\alpha\}$, можно рассматривать различные подмногообразия семейства $K(3,7)$. Рассмотрим, например, подмногообразие Ψ_2 (голономную конгруэнцию) коник $\omega_j=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_3^1=\omega_3^2=0$. Для этой конгруэнции точка A_j является трехкратным фокусом коники C. Остальным фокусам коники C соответствует строенное фокальное семейство $\omega_i=0$. Причем, фокальные линии $\omega_i=0$ являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник C. Для этой конгруэнции коник точка A_j является характеристической точкой прямой A_jA_3. Неголономное подмногообразие Ψ_6 [5] коник $\omega_\alpha^\rho=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_α является характеристической точкой плоскости $A_\alpha A_\nu A_\mu$ $(\alpha,\rho,\nu,\mu=1,2,3,4;\ \alpha\neq\rho,\ \nu,\ \mu;\ \rho\neq\nu,\ \mu;\ \nu\neq\mu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—382.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТЛ, М.-Л., 1948.
3. В. С. Малаховский. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 43—53.
4. В. И. Матвеенко. Дифференциальная геометрия шестипараметрического семейства невырожденных коник, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство. Третья Прибалтийская геометрическая конференция. Тезисы докладов Паланга, 1968, 114—115.
5. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометрический сборник, вып. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179—194.