ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 184 1970

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕМЕЙСТВА $K(3,7)$ в $P_3$

В. И. МАТВЕЕНКО

(Представлена кафедрой высшей математики)

В настоящей статье в трехмерном проективном пространстве рассматривается семейство $K(3, 7)$ — семипараметрическое семейство невырожденных коник, плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство. Это семейство коник существует с произволом одной функции семи аргументов. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] — [5]. Индексы принимают следующие значения; $i, j, k, g, t = 1, 2$; $i \neq j$; $k \neq t$; $m, n, r = 1, 2, 3$; $m \neq n$; $m \neq r$; $n \neq r$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$; $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $\sigma = i + 3$; $\varkappa = j + 3$; $\xi = 5 + i$; $\eta = 5 + j$. По $i, j, g, r, \alpha$ не суммировать!

Поместим вершины $A_1$ и $A_2$ подвижного репера $\{A_\alpha\}$ в различные точки коники $C$, вершину $A_3$ — в полюс прямой $A_1A_2$ относительно коники $C$, вершину $A_4$ — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где $\omega_\alpha^\beta$ — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta], \tag{2}$$

Уравнения коники $C$ относительно этого репера имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \; x^4 = 0, \; p \neq 0. \tag{3}$$

Произведем частичную нормировку вершин репера $\{A_\alpha\}$, положив $p = 1$. Формы

$$\omega_n^4, \; \omega_i^j, \; \omega_3^j - \omega_i^3, \; \omega_k^k - 2\omega_3^3$$

являются главными формами. Выберем из них за базисные

$$\omega_n = \omega_n^4, \; \omega_\sigma = \omega_i^j, \; \omega_\xi = \omega_3^j - \omega_i^3.$$

Оставшаяся главная форма выразится через них в виде

$$\omega_k^k - 2\omega_3^3 = \Gamma^\lambda \omega_\lambda. \tag{4}$$

Из этого уравнения обычным путем [1] получается следующая система дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта $\Gamma_1 \{\Gamma^\lambda\}$:

$$\delta\Gamma^i = \Gamma^i(\pi_4^4 - \pi_i^i) - \Gamma^3\pi_3^i + \Gamma^\sigma\pi_4^j - \Gamma^\xi\pi_4^3 - \pi_4^i - \Gamma^i \sum_k \Gamma^{k+5}\pi_k^3,$$

$$\delta\Gamma^{\sigma} = \Gamma^{\sigma}(\pi_j^j - \pi_i^i) - \Gamma^{\xi}(\pi_3^i + \pi_j^3) - \Gamma^{\sigma}\sum_k \Gamma^{k+5}\pi_k^3,$$

$$\delta\Gamma^{\xi} = \Gamma^{\xi}(\pi_j^j - \pi_3^3) - \Gamma^{\sigma}\pi_3^j - \Gamma^{\xi}\sum_k \Gamma^{k+5}\pi_k^3, \qquad (5)$$

$$\delta\Gamma^3 = \Gamma^3(\pi_4^4 - \pi_3^3) + 2\pi_4^3 - \Gamma^k\pi_k^3 + \sum_k \Gamma^{k+5}(\pi_4^t - \Gamma^3\pi_k^3).$$

Эта система уравнений дает возможность произвести следующую фиксацию репера:

$$\Gamma^4 = \Gamma^5 = 0,\ \Gamma^6 \neq 0,\ \Gamma^7 \neq 0. \qquad (6)$$

Формы $\omega_3^i$ и $\omega_i^3$ становятся главными формами и можно записать их разложение по базисным формам в виде

$$\omega_3^i = \Gamma_3^{i\lambda}\,\omega_\lambda,\quad \omega_i^3 = \Gamma_3^{j\lambda}\,\omega_\lambda - \omega_\xi. \qquad (7)$$

Выясним геометрический смысл фиксации (6). Голономное подмногообразие $\Psi_4^*$ [5] коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники $C$ неподвижна. Из рассмотрения системы уравнений

$$\begin{gathered}(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,\ x^4 = 0,\ x^n\omega_n = 0,\\ \Gamma^\lambda\omega_\lambda x^1x^2 + \sum_k\left[\omega_{k+3}(x^k)^2 + \omega_{k+5}\,x^kx^3\right] = 0\end{gathered} \qquad (8)$$

для определения точек пересечения исходной и смежной коник семейства $K(3,7)$ вытекает следующее предложение: среди подмногообразий $\Psi_1$ [5] коник

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \omega_4 : \omega_5 : \omega_6 : \omega_7 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4, \qquad (9)$$

принадлежащих подмногообразию $\Psi_4^*$ коник, существует в общем случае 480 таких подмногообразий $\Psi_1$ коник, для каждого из которых коника $C$ имеет четырехкратную характеристическую точку $M_u$ $(u = 1, 2, 3, \ldots, 480)$. При фиксации (6) вершины $A_i$ репера $\{A_\alpha\}$ помещаются в точки $M_i$. Подмногообразие $\Psi_1^i$ коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_\varkappa = \omega_6 = \omega_7 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка $A_j$ является четырехкратной характеристической точкой коники $C$, плоскость которой для этого подмногообразия неподвижна. Подмногообразие $\Psi_1^{i+2}$ коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_\eta = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники неподвижна, а точки $A_1$ и $A_2$ являются характеристическими точками, причем точка $A_j$—двухкратной характеристической точкой, коники $C$. Выбором базисных форм $\omega_\lambda$ исключаются случаи, когда размерность многообразия плоскостей коник меньше трех, когда точки $A_i$ становятся двухкратными характеристическими точками коники $C$ подмногообразий $\Psi_1^{i+2}$ коник, когда характеристические точки коники $C$ для подмногообразий $\Psi_1^i$ становятся неопределенными.

Из системы уравнений (7) обычным путем получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего продолженного фундаментального объекта $\Gamma_2\{\Gamma_1, \Gamma_3^{i\lambda}\}$ [1]:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_3^{gi} &= \Gamma_3^{gi}(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_g^g - \pi_i^i) + \Gamma_3^{g\sigma}\pi_4^j - \Gamma_3^{g\xi}\pi_4^3,\\
\delta\Gamma_3^{i3} &= \Gamma_3^{i3}(\pi_4^4 - \pi_i^i) + (\Gamma_3^{i\eta} - 1)\pi_4^i + \Gamma_3^{i\xi}\pi_4^j,\\
\delta\Gamma_3^{i\sigma} &= \Gamma_3^{i\sigma}(\pi_j^j - 2\pi_i^i + \pi_3^3),\quad \delta\Gamma_3^{i\xi} = \Gamma_3^{i\xi}(\pi_j^j - \pi_i^i),\\
\delta\Gamma_3^{i\varkappa} &= \Gamma_3^{i\varkappa}(\pi_3^3 - \pi_j^j),\quad \delta\Gamma_3^{i\eta} = 0.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Так как эта система уравнений алгебраически разрешима относительно всех независимых вторичных форм $\overline{\pi}_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \pi_4^4$, то объект $\Gamma_2$ является основным [1]. Из систем уравнений (5) и (10) непосредственно замечаем, что величины $\Gamma^\xi$, $\Gamma^{k\sigma}$, $\Gamma_3^{i\xi}$ являются относительными инвариантами. Условие $\Gamma^\xi = 0$ характеризует семейство коник, для которого точка $A_j$ является трехкратной характеристической точкой коники $C$ подмногообразия $\Psi_1^{i+2}$. Условие $\Gamma_3^{k\sigma} = 0$ $[\Gamma_3^{i\xi} = 0]$ характеризует семейство коник, для которого касательная $l^\sigma$ $[l^\xi]$ к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}$ $[(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega_5=\omega_\eta=0}]$ совпадает с прямой $A_3A_t$ $[A_3A_j]$.

Величины

$$\Gamma_3^{j\xi}, \quad E = (\Gamma_3^{j\sigma} - 1)\,\Gamma_3^{i\varkappa}, \quad L_i = \frac{\Gamma_3^{i\xi}}{(\Gamma^\xi)^2\,\Gamma_3^{j\xi}}, \qquad H_i = \Gamma^\eta \Gamma_3^{j\sigma}$$

являются абсолютными инвариантами. Геометрически они характеризуются через сложные отношения четверок точек следующим образом:

$$E = -(A_jA_3;\ B_i^\sigma B^j), \quad \Gamma_3^{j\xi} = \frac{1}{1 + (A_iA_j;\ B_\xi B_3^\xi)},$$
$$H_i = (A_iA_3;\ M_{jj}B^i), \quad L_i = \frac{1}{2}(A_iA_j;\ M_{i3}B_3^\sigma), \tag{11}$$

где $B_3^\sigma$ $[B_3^\xi]$ — точка пересечения прямых $A_1A_2$ и $l^\sigma$ $[l^\xi]$, $B_i^\sigma$ — точка пересечения прямой $A_jA_3$ с касательной $l_i$ к линии $(A_i)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}$, $B^i$ — точка огибающей семейства прямых $(A_iA_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}$, $M_{ir}$ — проекция из точки $A_r$ на прямую $A_mA_n$ характеристической точки $M^i = (\Gamma^\xi)^2A_i + 2A_j - 2\Gamma^\xi A_3$ коники $C$ подмногообразия $\Psi_1^{i+2}$ коник. Используя выражения (11), получаем следующие равенства:

$$(A_1A_3B_2^5B^1) = (A_2A_3;\ B_1^4B^2), \quad (A_1A_2;\ B_3^\sigma B_\sigma) = -1,$$
$$(A_1A_3M_{12}B^1)\, A_2A_3;M_{11}B^2) = -2(A_1A_3;\ B_2^5B^1),$$
$$(A_iA_3;\ M_{jj}B^i) = -2(A_jA_3;\ B_i^\sigma M_{ji}),$$

где $B_\sigma$ $[B_\xi]$ — точка огибающей семейства прямых

$$(\mathrm{A}_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_\chi=\omega_6=\omega_7=0}\ [(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=\omega_5=\omega_\eta=0}].$$

Система уравнений (10) дает возможность произвести следующую фиксацию репера:

$$\Gamma_3^{i3} = 1, \quad \Gamma_3^{i3}\Delta + \sum_k \Gamma_3^{i,k+5}\Delta_k = 0,$$
$$\sum_k \left[a\Gamma_3^{tk} + a_{k+5}^k(\Gamma_3^{t,k+5} - 1) + a_{k+5}^t\Gamma_3^{k,k+5}\right] = 0, \tag{12}$$

где

$$a = \Gamma_3^{16}\Gamma_3^{27} - \Gamma_3^{26}\Gamma_3^{17} \neq 0, \quad a_\xi^k = \Gamma_3^{jk}\Gamma_3^{i\eta} - \Gamma_3^{ik}\Gamma_3^{j\eta},$$
$$\Delta = (\Gamma_3^{26} - 1)(\Gamma_3^{17} - 1) - \Gamma_3^{16}\Gamma_3^{27} \neq 0, \quad \Delta_i = \Gamma_3^{i3}\Gamma_3^{j\eta} - \Gamma_3^{j3}(\Gamma_3^{i\eta} - 1).$$

Учитывая еще условие эквипроективности $(A_1A_2A_3A_4) = 1$, получаем, что все вторичные параметры зафиксированы и репер $\{A_\alpha\}$ становится каноническим. Обозначим через $l_3$ касательную к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega_5=\omega_1^3=\omega_2^3=0}$, через $b_i$ касательную плоскость к голономной поверхности $(A_i)_{\omega_j=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_3^1=\omega_3^2=0}$, а через $R_i$ точку пересечения прямой $l_3$ с плоскостью $b_i$. Подмногообразие $\Psi_1$ коник $\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega_5=\omega_1^3=\omega_2^3=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки $A_i$ неподвижны. Голономное подмногообразие $\Psi_2$ коник $\omega_j=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_3^1=\omega_3^2=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка $A_3$ и прямая $A_jA_3$ неподвижны. При фиксации (12) точка $A_4$ выбирается на прямой $l_3$ так, что $(R_1R_2;\ A_3A_4)=-1$. Если точки $R_1$ и $R_2$ совпадают, то точка $A_4$ совпадает с ними. При фиксации $\Gamma_3^{i3}=0$ исключается случай совпадения точки $Q=\Gamma_3^{13}A_1-\Gamma_3^{23}A_2$ ребра возврата торса $(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_4=\omega_5=\omega_6=\omega_7=0}$ с точками $A_j$. А неравенство $a\neq 0$ исключает случай совпадения прямых $l^6$ и $l^7$.

Деривационные формулы построенного канонического репера имеют вид:

$$dA_i=\Gamma_i^{i\lambda}\omega_\lambda A_i+\omega_\sigma A_j+(\Gamma_3^{j\lambda}\omega_\lambda-\omega_\xi)A_3+\omega_i A_4,$$

$$dA_3=\Gamma_3^{n\lambda}\omega_\lambda A_n+\omega_3 A_4,\quad dA_4=\Gamma_4^{\beta\lambda}\omega_\lambda A_\beta \tag{13}$$

где

$$\Gamma_\beta^{\beta\lambda}=0,\ (\Gamma_k^{k6}-2\Gamma_3^{36})\Gamma_3^{15}=(\Gamma_k^{k7}-2\Gamma_3^{37})\Gamma_3^{24}.$$

Используя построенный канонический репер $\{A_\alpha\}$, можно рассматривать различные подмногообразия семейства $K(3,7)$. Рассмотрим, например, подмногообразие $\Psi_2$ (голономную конгруэнцию) коник $\omega_j=\omega_3=\omega_\varkappa=\omega_3^1=\omega_3^2=0$. Для этой конгруэнции точка $A_j$ является трехкратным фокусом коники $C$. Остальным фокусам коники $C$ соответствует строенное фокальное семейство $\omega_i=0$. Причем, фокальные линии $\omega_i=0$ являются плоскими линиями, расположенными в плоскостях коник $C$. Для этой конгруэнции коник точка $A_j$ является характеристической точкой прямой $A_jA_3$. Неголономное подмногообразие $\Psi_6$ [5] коник $\omega_\alpha^\rho=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка $A_\alpha$ является характеристической точкой плоскости $A_\alpha A_\nu A_\mu$ ($\alpha,\rho,\nu,\mu=1,2,3,4$; $\alpha\neq\rho,\ \nu,\ \mu$; $\rho\neq\nu,\ \mu$; $\nu\neq\mu$.

ЛИТЕРАТУРА


1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—382.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТЛ, М.-Л., 1948.
3. В. С. Малаховский. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 43—53.
4. В. И. Матвеенко. Дифференциальная геометрия шестипараметрического семейства невырожденных коник, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство. Третья Прибалтийская геометрическая конференция. Тезисы докладов Паланга, 1968, 114—115.
5. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометрический сборник, вып. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179—194.