ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 187 1974

НЕУСТРАНИМАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НА СЕТКЕ УЗЛОВ В ПЛОСКОСТИ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром вычислительной лаборатории)

В настоящей работе результаты статьи [1] распространяются на систему точек в плоскости. При этом, как и ранее, считается, что узлы интерполирования в плоскости определяются экспериментально, т. е. не могут быть известны сколь угодно точно. Поэтому формулировка задачи в рассматриваемом случае будет точно такой же, как и в работе [1], а именно: оценить дисперсию отклонения множества интерполяционных тригонометрических полиномов, построенных на системе случайных сеток в плоскости, в среднем мало отклоняющихся от некоторой равносторонней сетки узлов в квадрате $(2\pi \times 2\pi)$ от полинома, построенного на узлах этой сетки.

Пусть имеется интерполяционный полином

$$T_{mn}(x,y)=\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n} f(x_i,y_j)D_m(x-x_i)D_n(y-y_j) \tag{1}$$

в системе точек на плоскости $\{x_i,y_j\}$,
где

$$x_i=\frac{2\pi i}{M}(i=0,1,2...2m),\ M=2m+1,$$

$$y_j=\frac{2\pi j}{N}(j=0,1,2....2n),\ N=2n+1 \tag{2}$$

и

$$D_m(t)=\frac{\sin(2m+1)\frac{t}{2}}{(2m+1)\sin\frac{t}{2}}. \tag{3}$$

Величина отклонения интерполяционного полинома, построенного на сетке узлов

$$\left.\begin{aligned} x_{iq}&=x_i+\varepsilon_{xiq}\\ y_{jq}&=y_j+\varepsilon_{yjq}\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

фиксированной в q-ом эксперименте (реализация), от полинома, построенного по системе равноотстоящих узлов (2), запишется в следующем виде

$$\Delta_{mnq}(x,y)=\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n} f(x_i,y_j)[D_m(x-x_i+\varepsilon_{xiq})\times$$
$$\times D_n(y-y_j+\varepsilon_{yjq})-D_m(x-x_i)D_n(y-y_j)]. \qquad (5)$$

Далее будем полагать, что системы случайных величин

$$\varepsilon_{xi}(i=0,1...2\,m) \text{ и } \varepsilon_{yj}(j=0,1...2\,n)$$

обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} M[\varepsilon_{xi}\cdot\varepsilon_{xp}]=\begin{cases} 0 \text{ при } i\neq p \\ d_x^2 \text{ при } i=p \end{cases} \quad (i,p=0,1...2m), \\ M[\varepsilon_{yj}\cdot\varepsilon_{yk}]=\begin{cases} 0 \text{ при } j\neq k \\ d_y^2 \text{ при } j=k \end{cases} \quad (j,k=0,1...2\,n), \\ M[\varepsilon_{xi}\cdot\varepsilon_{yj}]=0(i=0,1...2\,m),(j=0,1...2\,n). \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Последнее соотношение говорит об отсутствии корреляции в ошибках определения координат узлов на плоскости в направлении осей x и y.

Считая абсолютное значение отклонений ε_{xi} и ε_{yj} на множестве экспериментов достаточно малым по сравнению с шагом интерполирования по осям, запишем для величины отклонения Δ_{mnq} (x, y) следующее приближенное равенство:

$$\Delta_{mnq}(x,y)=\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n} f(x_iy_j)[\varepsilon_{xiq}D_m'(x-x_i)D_n(y-y_j)+$$
$$+\varepsilon_{yjq}D_m(x-x_i)D_n'(y-y_j)]. \qquad (7)$$

С учетом (6) нетрудно показать, что

$$M[\Delta_{mn}(x,y)]=0, \qquad (8)$$

а выражение для дисперсии приводится к следующему виду

$$D[\Delta_{mn}(x,y)]=\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n} f^2(x_i,y_j)[d_x^2D_m'^2(x-x_i)\times$$
$$\times D_n^2(y-y_j)+d_y^2D_m^2(x-x_i)D_n'^2(y-y_j)]. \qquad (9)$$

Считая далее $f(x_i, y_j)$ ограниченными в своей совокупности постоянной C и учитывая, что для сетки (2)

$$\sum_{i=0}^{2m} D_m'^2(x-x_i)=\frac{m(m+1)}{3},$$

$$\sum_{i=0}^{2m} D_m^2(x-x_i)=1,$$

для дисперсии получим оценку

$$D[\Delta_{mn}(x,y)]\leqslant C^2\left[d_x{}^2\frac{m(m+1)}{3}+d_y{}^2\frac{n(n+1)}{3}\right]. \qquad (10)$$

Примем в качестве неустранимой погрешности верхнюю грань значений $D\left[\Delta_{mn}\ (x,\ y)\right]$,
тогда

$$\sigma_2=C\cdot\sqrt{d_x{}^2\frac{m(m+1)}{3}+d_y{}^2\frac{n(n+1)}{3}}\ . \qquad (11)$$

В частном случае, когда $M=N$ (соответственно $m=n$) и $d_x=d_y=d$, имеем

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{2}{3}}Cdn \qquad (12)$$

и соответственно для относительной погрешности

$$\xi_2=\frac{\sigma_2}{C}=\sqrt{\frac{2}{3}}dn. \qquad (13)$$

Таким образом, как и в случае одного переменного [1], неустранимая погрешность второго рода для задачи приближения в плоскости увеличивается, если по мере увеличения числа отсчетов не уменьшать погрешность в определении исходных данных, и особенно абсцисс интерполирования. Поскольку в противном случае возрастает также и общая погрешность приближения, то затраты на увеличение объема исходных данных становятся нецелесообразными с некоторого момента.

Теперь рассмотрим оценку дисперсии величины $\Delta_{mn}(x,y)$ при наличии корреляции между величинами ε_{xi} и ε_{yj}, т. е. при

$$M[\varepsilon_{xi}\cdot\varepsilon_{yj}]=d^2_{xy}. \qquad (14)$$

В этом случае имеем

$$D[\Delta_{mn}(x,y)]\leqslant C^2\Big[d_x{}^2\frac{m(m+1)}{3}+d_y{}^2\frac{n(n+1)}{3}+$$
$$+d^2_{xy}\sum_{i=0}^{2m}D'_m(x-x_i)D_m(x-x_i)\sum_{j=0}^{2n}D_n'(y-y_j)D_n(y-y_j)\Big]. \qquad (15)$$

Используя известное тождество

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots\cos m\,\alpha=\frac{\sin(2m+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

нетрудно доказать, что

$$\sum_{i=0}^{2m}D'_m(x-x_i)D_m(x-x_i)\equiv 0. \qquad (16)$$

для равноотстоящих узлов $x_i(i=0,1...2m)$. Поэтому в (15) последний член тождественно равен нулю и получающаяся оценка для дисперсии отклонения аналогична (10). Иными словами, значение дисперсии не зависит от корреляции между погрешностями определения координат сетки узлов. Нетрудно видеть, что это является следствием ортогональности тригонометрических полиномов на дискретном множестве равноотстоящих точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. Наац. Неустранимая погрешность интерполирования тригонометрическими полиномами. (Настоящий сборник).