

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКЕ ЗАКОНА ПОДОБИЯ ДЕВИАТОРОВ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Наиболее употребительной формой оценки гипотезы о подобии девиаторов напряжений и деформаций в теории пластичности является сравнение параметров μ и ν , введенных Лоде.

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \nu = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3}. \quad (1)$$

Равенство этих параметров соответствует подобию кругов Мора для напряженного и деформированного состояний, т. е. указывает на пропорциональность между максимальными касательными напряжениями и максимальными сдвигами.

Экспериментальная проверка, проведенная Лоде, Тейлором-Квини и рядом других исследователей [1], [2], [3], показала близкое соответствие этого условия с поведением материалов в пластической области. Однако в этих исследованиях были отмечены и некоторые отклонения от равенства μ и ν . Это позволило ряду исследователей утверждать, что зависимость между μ и ν носит более сложный характер и что указанное равенство может быть принято как приближенное. Некоторые авторы считают, что эти отклонения всецело являются лишь следствием анизотропии материалов образцов.

Укажем некоторые из возможных причин экспериментально полученных отклонений в отдельных исследованиях этого рода, обусловленных методикой эксперимента.

Зависимость между напряжениями и деформациями в теории малых упруго-пластических деформаций может быть представлена для главных направлений в форме [3], [4], [5].

$$e_1 = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_1 - m(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \quad \searrow \\ 2 \quad \leftarrow \quad 3 \end{array}. \quad (2)$$

Здесь $m = m(\lambda)$ — коэффициент полной (упруго-пластической) деформации. Нетрудно убедиться, что именно эта форма и соответствует подобию девиаторов. Подставляя в ν значения деформаций, определенные по (2), получим выражение для μ .

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\frac{1}{E(\lambda)} \{2[\sigma_2 - m(\sigma_1 + \sigma_3)] - [\sigma_1 - m(\sigma_2 + \sigma_3)] - \\ &\quad - [\sigma_3 - m(\sigma_1 + \sigma_2)]\}}{\frac{1}{E(\lambda)} \{[\sigma_1 - m(\sigma_2 + \sigma_3)] - [\sigma_3 - m(\sigma_1 + \sigma_2)]\}} = \\ &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \mu. \end{aligned}$$

Предположим, что материалы при упруго-пластической деформации точно подчиняются закону (2). Основным средством экспериментального изучения упруго-пластической деформации является испытание трубчатых тонкостенных образцов, в которых реализуется плоское напряженное состояние, для которого, пренебрегая $\sigma_r \approx 0$, имеем

$$\begin{aligned} e_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - m\sigma_z], \quad e_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - m\sigma_\theta], \\ e_r &= \frac{1}{E} [-m(\sigma_\theta + \sigma_z)], \quad \begin{aligned} E &= E(\lambda), \\ m &= m(\lambda). \end{aligned} \end{aligned} \quad (3)$$

Характерным для подобных экспериментальных работ является то обстоятельство, что в опытах замеряются лишь две главные деформации, а третья вычисляется из условия несжимаемости материала.

$$\theta = e_\theta + e_z + e_r = 0, \quad \frac{1}{E} [\sigma_\theta - m\sigma_z + \sigma_z - m\sigma_\theta] + e_r = 0,$$

откуда

$$e_r = \frac{m-1}{E} (\sigma_\theta + \sigma_z).$$

Используя это значение для представления результатов эксперимента, будем иметь

$$\mu = \frac{2\sigma_\theta - \sigma_z}{\sigma_z} = 2n - 1, \quad \nu = \frac{3(n-m)}{2-m+n(1-2m)}, \quad n = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}. \quad (4)$$

Часто при экспериментах за пределами упругости не выделяют из замеряемых деформаций их упругие составляющие. Будучи малыми, своим присутствием они все же существенно влияют на величину m , делая ее всегда меньше 0,5. Поэтому при представлении экспериментальных результатов с использованием при их обработке условия несжимаемости зависимость между μ и ν , определяемая по (4), дает отклонения от диагональной прямой графика $\mu - \nu$.

Характер этих отклонений (для примера при $m=0,45$) показан пунктиром на рис. 1. Здесь же приведены результаты опытов Лоде и Тейлора-Квини, полученные при использовании указанной методики.

Получение подобных отклонений при отмеченной обработке данных эксперимента является свидетельством надежности закона подобия девиаторов, а не его приближенности.

Аналогично можно показать, что при смешанном (растяжение — сжатие, $M - P - q$ опыты) напряженном состоянии

$$\sigma_1 = \sigma_p, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_c,$$

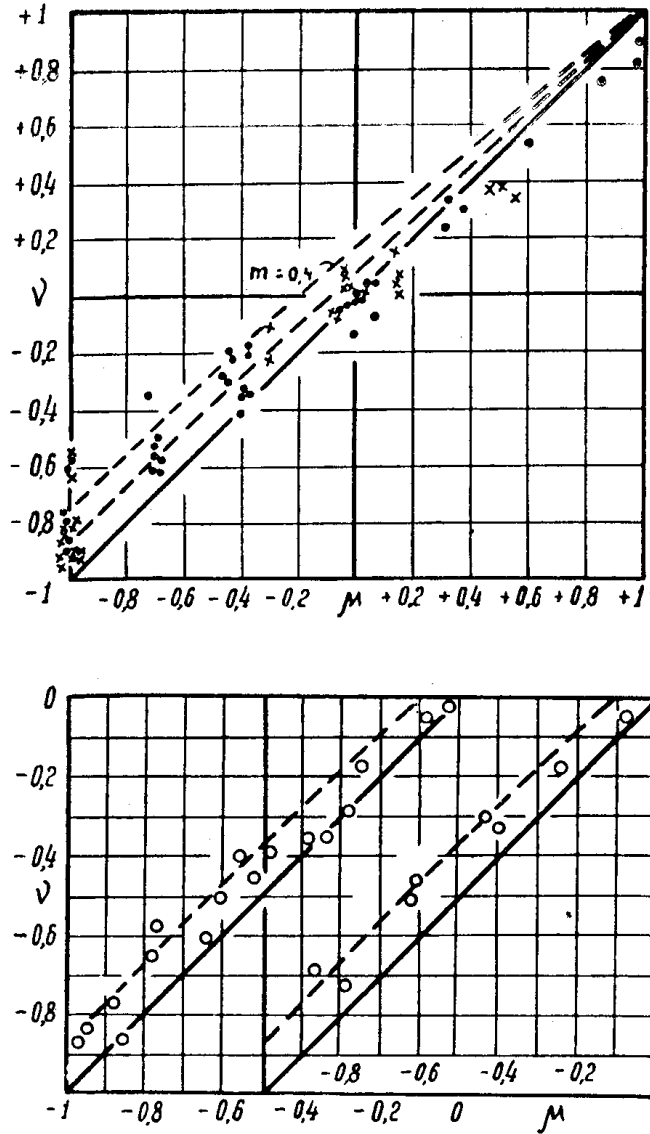


Рис. 1

$$\mu = \frac{\sigma_c - \sigma_p}{\sigma_p + \sigma_c},$$

$$\nu = \frac{3(1-m)(\sigma_c - \sigma_p)}{(1+m)(\sigma_p + \sigma_c)} \text{ при определении } e_2 \text{ из условия несжимаемости,}$$

$$\nu = \frac{3m(\sigma_c - \sigma_p)}{(2-m)\sigma_p + 3m\sigma_c} \text{ при определении из условия несжимаемости } e_3.$$

Соответствующий характер отклонений, который должен вытекать из опытов, показан на рис. 2, а.

Если у материала имеет место необратимая объемная сжимаемость, то аналогичные отклонения будут получаться даже при исключении упругих составляющих деформаций.

Нередко при исследованиях пользуются понятиями «истинных» напряжений и деформаций.

$$\bar{e}_k = \ln(1 + e_k), \quad \bar{\sigma}_k = \sigma_k(1 + e_k) \quad (k=1, 2, 3). \quad (5)$$

Заметим, что сама форма выражений $\bar{\sigma}_k$ уже предполагает условие $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0$, $\bar{e}_k$ при этом не являются непосредственно измеряемыми величинами.

Предполагая по-прежнему, что материалы подчиняются условию (2), выясним, как может сказаться специфика содержания «истинных» напряжений и деформаций, если делать обработку результатов опытов с помощью этих выражений в области малых упруго-пластических деформаций.

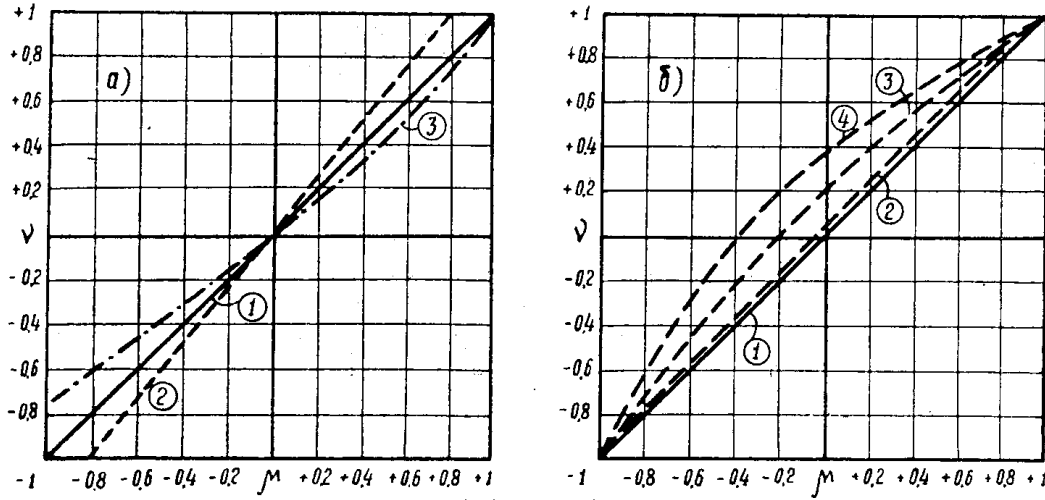


Рис. 2. а) 1 — $\mu = \nu$; 2 — $\nu = f(\mu)$ при определении e_2 из условия $\Theta = 0$;
3 — $\nu = f(\mu)$ при определении e_3 из условия $\Theta = 0$.
б) 1 — $\mu = \nu$; 2 — $m = 0,45$; $e_1 = 0,01$; 3 — $m = 0,45$; $e_1 = 0,1$; 4 — $m = 0,3$; $e_1 = 0,1$

Для плоского напряженного состояния будем иметь:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1(1 + e_1), \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2(1 + e_2) = n\sigma_1(1 + e_2), \quad \bar{\sigma}_3 = 0,$$

где

$$n = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{\frac{1}{E} [\sigma_2 - m\sigma_1]}{\frac{1}{E} [\sigma_1 - m\sigma_2]} = \frac{n - m}{1 - mn},$$

откуда

$$e_2 = e_1 \frac{n - m}{1 - mn}.$$

$$\bar{\mu} = \frac{2\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1} = 2n \frac{1 + e_2}{1 + e_1} - 1 = \frac{2n - 2mn^2 + 2n^2 e_1 - 1 + mn - e_1}{1 - mn + e_1 - e_1 mn}.$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \frac{3\bar{e}_2}{2\bar{e}_1 + \bar{e}_2} = \frac{3 \ln(1 + e_2)}{2 \ln(1 + e_1) + \ln(1 + e_2)} = \\ &= \frac{3 \ln(1 - mn + ne_1 - me_1) - 3 \ln(1 - mn)}{2 \ln(1 + e_1) + \ln(1 - mn + ne_1 - me_1) - \ln(1 - mn)}. \end{aligned}$$

Видно, что связь $\bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ для рассматриваемых здесь условий находится в зависимости от степени деформации. На рис. 2, б графически показана зависимость $\bar{\mu} - \bar{\nu}$ для $m=0,3; 0,45$ и деформаций порядка $l=0,01; 0,1$. Из графика следует, что отклонения становятся заметными при нарастании порядка величины деформации.

Таким образом, наличие отклонений подобного рода при обработке эксперимента с использованием понятий «истинных» напряжений и деформаций может быть предопределено спецификой последних, хотя материал и будет следовать условию $\mu=\nu$ и соответственно зависимостям (2).

Если же законом поведения материалов является форма в «истинных» напряжениях и деформациях, то можно ожидать влияния обратного характера на зависимость $\mu=\nu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. И л ь ю ш и н. Пластичность. ГИТТЛ. 1948.
 2. Сб. «Теория пластичности» под ред. Ю. Н. Р а б о т н о в а. ИЛ., 1948.
 3. А. Н а д а и. Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ., 1954.
 4. Ю. Н. Р а б о т н о в. Сопротивление материалов. ГИФМЛ, 1962.
 5. А. Р. Р ж а н и ц ы н. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., 1954.
-