ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА
ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 188 1974

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКЕ ЗАКОНА ПОДОБИЯ ДЕВИАТОРОВ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Наиболее употребительной формой оценки гипотезы о подобии девиаторов напряжений и деформаций в теории пластичности является сравнение параметров μ и ν, введенных Лоде.

$$\mu=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3},\quad \nu=\frac{2e_2-e_1-e_3}{e_1-e_3}. \tag{1}$$

Равенство этих параметров соответствует подобию кругов Мора для напряженного и деформированного состояний, т. е. указывает на пропорциональность между максимальными касательными напряжениями и максимальными сдвигами.

Экспериментальная проверка, проведенная Лоде, Тейлором-Квини и рядом других исследователей [1], [2], [3], показала близкое соответствие этого условия с поведением материалов в пластической области. Однако в этих исследованиях были отмечены и некоторые отклонения от равенства μ и ν. Это позволило ряду исследователей утверждать, что зависимость между μ и ν носит более сложный характер и что указанное равенство может быть принято как приближенное. Некоторые авторы считают, что эти отклонения всецело являются лишь следствием анизотропии материалов образцов.

Укажем некоторые из возможных причин экспериментально полученных отклонений в отдельных исследованиях этого рода, обусловленных методикой эксперимента.

Зависимость между напряжениями и деформациями в теории малых упруго-пластических деформаций может быть представлена для главных направлений в форме [3], [4], [5].

$$e_1=\frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_1-m(\sigma_2+\sigma_3)\right] \quad \begin{array}{c} \nearrow 1 \searrow \\ 2 \longleftarrow 3 \end{array}. \tag{2}$$

Здесь $m=m(\lambda)$ — коэффициент полной (упруго-пластической) деформации. Нетрудно убедиться, что именно эта форма и соответствует подобию девиаторов. Подставляя в ν значения деформаций, определенные по (2), получим выражение для μ.

$$\nu=\frac{2e_2-e_1-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\frac{1}{E(\lambda)}\{2[\sigma_2-m(\sigma_1+\sigma_3)]-[\sigma_1-m(\sigma_2+\sigma_3)]-\\-[\sigma_3-m(\sigma_1+\sigma_2)]\}}{\frac{1}{E(\lambda)}\{[\sigma_1-m(\sigma_2+\sigma_3]-[\sigma_3-m(\sigma_1+\sigma_2)]\}}=$$

$$=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}=\mu.$$

Предположим, что материалы при упруго-пластической деформации точно подчиняются закону (2). Основным средством экспериментального изучения упруго-пластической деформации является испытание трубчатых тонкостенных образцов, в которых реализуется плоское напряженное состояние, для которого, пренебрегая $\sigma_\rho\approx 0$, имеем

$$e_\theta=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-m\sigma_z],\quad e_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-m\sigma_\theta],$$

$$e_\rho=\frac{1}{E}[-m(\sigma_\theta+\sigma_z)],\quad \begin{matrix}E=E(\lambda),\\ m=m(\lambda).\end{matrix} \tag{3}$$

Характерным для подобных экспериментальных работ является то обстоятельство, что в опытах замеряются лишь две главные деформации, а третья вычисляется из условия несжимаемости материала.

$$\theta=e_\theta+e_z+e_\rho=0,\quad \frac{1}{E}[\sigma_\theta-m\sigma_z+\sigma_z-m\sigma_\theta]+e_\rho=0,$$

откуда

$$e_\rho=\frac{m-1}{E}(\sigma_\theta+\sigma_z).$$

Используя это значение для представления результатов эксперимента, будем иметь

$$\mu=\frac{2\sigma_\theta-\sigma_z}{\sigma_z}=2n-1,\quad \nu=\frac{3(n-m)}{2-m+n(1-2m)},\quad n=\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}. \tag{4}$$

Часто при экспериментах за пределами упругости не выделяют из замеряемых деформаций их упругие составляющие. Будучи малыми, своим присутствием они все же существенно влияют на величину m, делая ее всегда меньшей 0,5. Поэтому при представлении экспериментальных результатов с использованием при их обработке условия несжимаемости зависимость между μ и ν, определяемая по (4), дает отклонения от диагональной прямой графика $\mu-\nu$.

Характер этих отклонений (для примера при $m=0{,}45$) показан пунктиром на рис. 1. Здесь же приведены результаты опытов Лоде и Тейлора-Квини, полученные при использовании указанной методики.

Получение подобных отклонений при отмеченной обработке данных эксперимента является свидетельством надежности закона подобия девиаторов, а не его приближенности.

Аналогично можно показать, что при смешанном (растяжение — сжатие, $M-P-q$ опыты) напряженном состоянии

$$\sigma_1=\sigma_p,\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=\sigma_c,$$

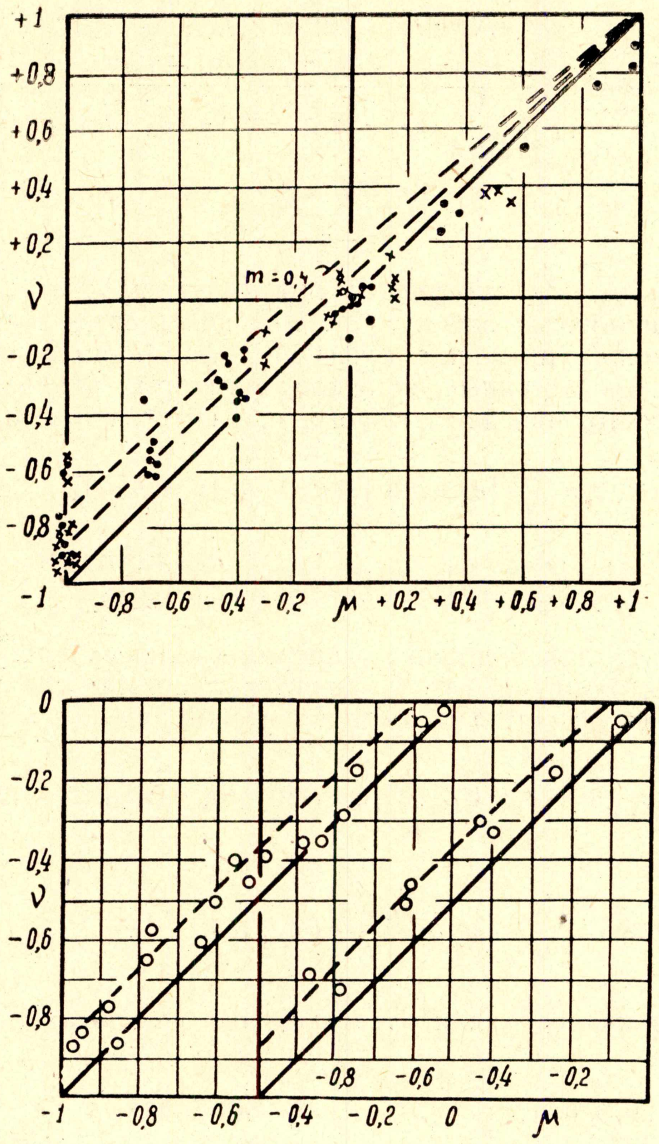

Рис. 1

$$\mu=\frac{\sigma_{c}-\sigma_{p}}{\sigma_{p}+\sigma_{c}},$$

$$\nu=\frac{3(1-m)(\sigma_{c}-\sigma_{p})}{(1+m)(\sigma_{p}+\sigma_{c})}$$ при определении e_2 из условия несжимаемости,

$$\nu=\frac{3m(\sigma_{c}-\sigma_{p})}{(2-m)\sigma_{p}+3m\sigma_{c}}$$ при определении из условия несжимаемости e_3.

Соответствующий характер отклонений, который должен вытекать из опытов, показан на рис. 2, *а*.

Если у материала имеет место необратимая объемная сжимаемость, то аналогичные отклонения будут получаться даже при исключении упругих составляющих деформации.

Нередко при исследованиях пользуются понятиями «истинных» напряжений и деформаций.

$$\bar{e}_k=\ln(1+e_k),\quad \bar{\sigma}_k=\sigma_k(1+e_k)\quad (k=1,\,2,\,3). \tag{5}$$

Заметим, что сама форма выражений $\overline{\sigma}_k$ уже предполагает условие $\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3=0$, $\overline{e}_k$ при этом не являются непосредственно замеряемыми величинами.

Предполагая по-прежнему, что материалы подчиняются условию (2), выясним, как может сказаться специфика содержания «истинных» напряжений и деформаций, если делать обработку результатов опытов с помощью этих выражений в области малых упруго-пластических деформаций.

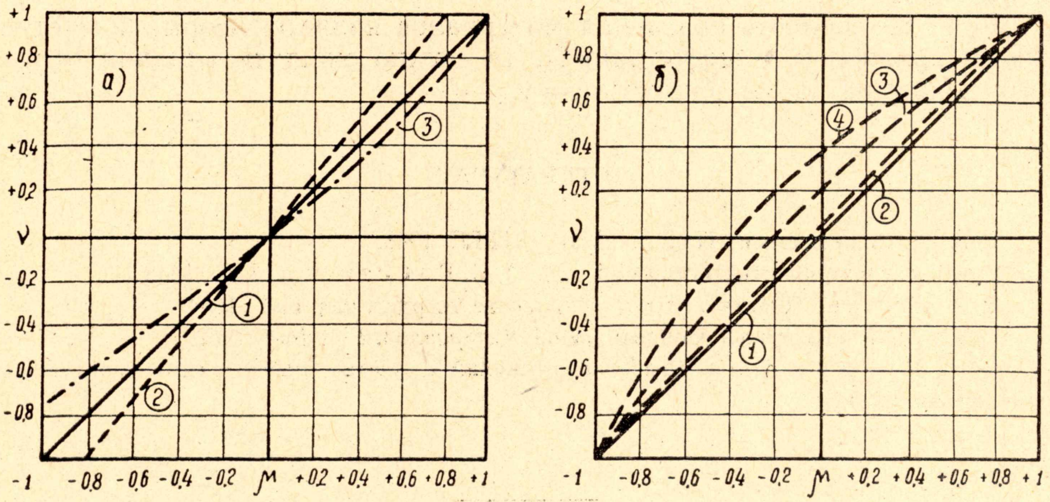

Рис. 2. *а)* 1 — $\mu=\nu$; 2 — $\nu=f(\mu)$ при определении e_2 из условия $\Theta=0$; 3 — $\nu=f(\mu)$ при определении e_3 из условия $\Theta=0$.
б) 1 — $\mu=\nu$; 2 — $m=0{,}45$; $e_1=0{,}01$; 3 — $m=0{,}45$; $e_1=0{,}1$; 4 — $m=0{,}3$; $e_1=0{,}1$

Для плоского напряженного состояния будем иметь

$$\overline{\sigma}_1=\sigma_1(1+e_1),\quad \overline{\sigma}_2=\sigma_2(1+e_2)=n\sigma_1(1+e_2),\quad \overline{\sigma}_3=0,$$

где

$$n=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

$$\frac{e_2}{e_1}=\frac{\frac{1}{E}[\sigma_2-m\sigma_1]}{\frac{1}{E}[\sigma_1-m\sigma_2]}=\frac{n-m}{1-mn},$$

откуда

$$e_2=e_1\frac{n-m}{1-mn}.$$

$$\overline{\mu}=\frac{2\overline{\sigma}_2-\overline{\sigma}_1}{\overline{\sigma}_1}=2n\frac{1+e_2}{1+e_1}-1=\frac{2n-2mn^2+2n^2e_1-1+mn-e_1}{1-mn+e_1-e_1mn}.$$

$$\overline{\nu}=\frac{3\overline{e}_2}{2\overline{e}_1+\overline{e}_2}=\frac{3\ln(1+e_2)}{2\ln(1+e_1)+\ln(1+e_2)}=$$

$$=\frac{3\ln(1-mn+ne_1-me_1)-3\ln(1-mn)}{2\ln(1+e_1)+\ln(1-mn+ne_1-me_1)-\ln(1-mn)}.$$

Видно, что связь $\bar{\mu}$ и $\bar{\nu}$ для рассматриваемых здесь условий находится в зависимости от степени деформации. На рис. 2, *б* графически показана зависимость $\bar{\mu}-\bar{\nu}$ для $m=0{,}3$; 0,45 и деформаций порядка $l=0{,}01$; 0,1. Из графика следует, что отклонения становятся заметными при нарастании порядка величины деформации.

Таким образом, наличие отклонений подобного рода при обработке эксперимента с использованием понятий «истинных» напряжений и деформаций может быть предопределено спецификой последних, хотя материал и будет следовать условию $\mu=\nu$ и соответственно зависимостям (2).

Если же законом поведения материалов является форма в «истинных» напряжениях и деформациях, то можно ожидать влияния обратного характера на зависимость $\mu=\nu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. Пластичность. ГИТТЛ. 1948.
2. Сб. «Теория пластичности» под ред. Ю. Н. Работнова. ИЛ., 1948.
3. А. Надаи. Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ., 1954.
4. Ю. Н. Работнов. Сопротивление материалов. ГИФМЛ, 1962.
5. А. Р. Ржаницын. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., 1954.