ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 191 1969

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

А. П. КОНОНОВ, В. А. ЛУКУТИН, В. М. ОСИПОВ

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники)

В рабочих объемах электростатического генератора (ЭСГ) напряженность электрического поля достигает значительной величины, так как эти машины призваны работать при напряжении в десятки и сотни киловольт. Конструкции таких машин будут удачны, если отдельные детали выполнить так, что градиенты потенциалов на них не будут достигать критических значений. В связи с этим возникает необходимость в расчетах электрических полей весьма сложной конфигурации. Точные аналитические решения такой задачи весьма затруднительны, поэтому ниже предлагается приближенное решение.

Принципиальная схема генератора с проводящими транспортерами изображена на рисунках в предыдущих статьях. Транспортер, находящийся под щеткой возбуждения, потенциал которой $U_в$, получает заряд q и перемещается к высоковольтному индуктору, причем потенциал его возрастает до величины $U_н$.

В момент присоединения транспортера к высоковольтной щетке заряд, согласно известным законам электротехники, перемещается на индукторы (пластины). Поскольку последние не полностью охватывают транспортер, а соседние проводники заряжены, то на отходящем от высоковольтной щетки транспортере остается некоторый заряд q′, величина и знак которого зависят от режима работы машины и от ее геометрических размеров.

При решении задачи сделаем допущения, что поле в промежутке транспортер — статор плоскопараллельное, что этот промежуток имеет однородный диэлектрик и что коммутация только контактная. Разрежем по радиусу, проходящему через середину высоковольтного индуктора, цилиндрическую область между внешней и внутренней поверхностями статора и развернем ее в полосу. При этом картина поля в области заметно не изменится, так как ширина полосы во много раз меньше ее длины.

После сделанных преобразований будем искать потенциальную функцию электрического поля в прямоугольнике, изображенном на рис. 1.

В этой задаче будем считать известным закон распределения потенциала по границе области. По оси x располагаются равномерно заряженные стержни, линейные заряды на которых будут до высоковольтной щетки q, а после щетки $(x<0)$ — q′.

Так как поставленная задача линейная, то будем пользоваться методом наложения, рассчитывая сначала электрическое поле стато-

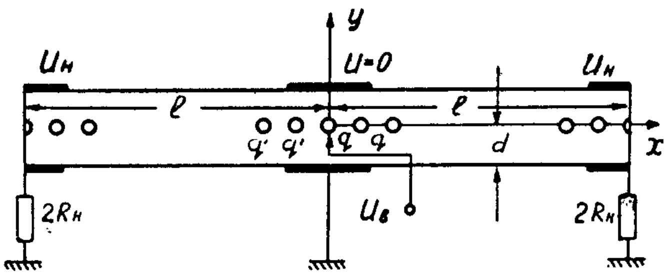

Рис. 1

ра, а затем поле, создаваемое заряженными транспортерами (поле ротора). Удобнее вычисления производить в относительных единицах, для чего все геометрические размеры поделим на l — длину полуокружности ротора.

Расчет электрического поля статора

В нагрузочном режиме потенциал изменяется по внутренней поверхности статора по определенному закону. С точки зрения выравнивания поля было бы желательно, чтобы касательная составляющая напряженности электрического поля на внутренней поверхности статора была везде одинаковой. Это соответствует равномерному распределению потенциала на этой поверхности. Конструкторы принимают ряд мер для достижения такого распределения, включая создание специальных делителей напряжения.

Не вдаваясь в подробности, мы будем принимать в расчетах потенциал индуктора возбуждения равным нулю, а высоковольтного — $U_н$. Между ними потенциал возрастает по линейному закону (рис. 2).

Принятый закон (можно задать и другой) распределения потенциала в пределах $-1 \leqslant x \leqslant 1$ может быть приближенно представлен в виде ряда

$$f(x) = b_0 + b_2 T_2 + \cdots + b_{2к} T_{2к} + \cdots + \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $T_{2к}$ — полиномы Чебышева первого рода,

$b_{2к}$ — коэффициенты, подлежащие определению обычным способом.

На двух других сторонах области $(x = \pm 1)$ потенциал равен $U_н$. Таким образом определение потенциала внутри замкнутой области сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа при вышеупомянутых граничных условиях:

$$\Delta U = 0, \; U = \begin{cases} f(x), & y = \pm d. \\ U_н, & x = \pm 1. \end{cases} \tag{2}$$

Известно, что интегрирование дифференциального уравнения можно заменить задачей отыскания функции, сообщающей некоторому функционалу минимальное значение (вариационная задача). Минимизирующую последовательность будем искать методом Ритца.

Выберем комбинацию координационных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции должны принадлежать области определения оператора Лапласа,

2) должны удовлетворять граничным условиям,

3) они должны быть полны по энергии.

Перечисленным условиям соответствует следующая последовательность

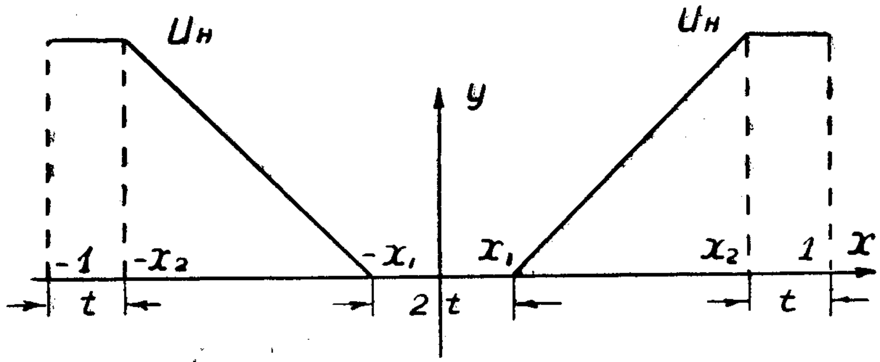

Рис. 2

$$U_c(x, y) = f(x)[1 + A_1(x^2 - 1)(y^2 - d^2) + A_2(x^2 - 1)^2(y^2 - d^2)^2]. \quad (3)$$

Она должна быть минимизирующей для функционала

$$F(u) = \iint (\mathrm{grad}\, U)^2 dx\, dy.$$

В зависимости от желаемой точности в последовательности (3) выбирают то или иное число слагаемых. Однако с увеличением числа слагаемых возрастает объем вычислений. Учитывая это обстоятельство, ограничимся тремя слагаемыми, которые содержат неизвестные коэффициенты A_1 и A_2. Последние находятся из системы двух уравнений, получаемых следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_2} = 0.$$

Решив эту систему, находим A_1 и A_2, подставляем найденные коэффициенты в формулу (3), которая и будет являться приближенным решением задачи. Задаваясь координатами x, y интересующих точек в рассматриваемой области, нетрудно по (3) определить потенциалы этих точек.

Расчет поля ротора (режим короткого замыкания)

На рис. 1 представлена принципиальная схема рабочих органов ЭСГ. В генераторах цилиндрического исполнения транспортеры обычно изготовляются в виде стержней. Исследования показывают, что энергетические характеристики машины будут тем лучше, чем больше будет стержней содержать ротор. Известно, что с увеличением количества стержней будет уменьшаться расстояние *a* между ними и радиус их сечения.

Мы будем считать диэлектрик ротора идеальным, утечки зарядов не будет, поэтому стержень, получив в зарядной системе заряд q, сохраняет его до присоединения к высоковольтной щетке. Точно так же, разрядившись, он с остаточным зарядом q′ достигает снова зарядной щетки.

Следовательно, задача будет сводиться к расчету плоско-параллельного поля, созданного системой параллельных равномерно заряженных цилиндров. Чтобы потенциал статора не изменился, необходимо выполнить условие

$$U = 0, \text{ при } y = \pm d.$$

Потенциал транспортера, находящегося под высоковольтной щеткой должен быть равен потенциалу соответствующего индуктора. В режиме короткого замыкания высоковольтные щетки и индукторы заземлены, поэтому можно полагать

$$U=0, \text{ при } x=\pm 1.$$

Для упрощения задачи заменим равномерно заряженные цилиндры равномерно заряженной плоскостью с плотностью заряда

$$\sigma = nq_0,\ k\sigma = nq'_0,\ k = \frac{q'_0}{q_0},$$

где n — число транспортеров, приходящихся на единицу длины периметра ротора, а q_0, q_0' — заряды транспортеров, приходящиеся на единицу их длины.

В результате получаем расчетную модель, изображенную на рис. 3.

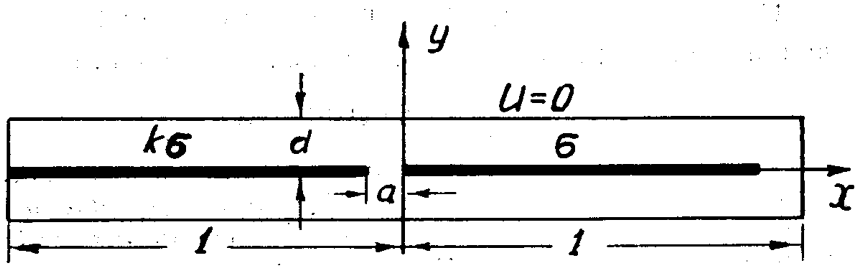

Рис. 3

Если полагать поле в ЭСГ квазистационарным, как это делается у подавляющего большинства авторов, то задача его расчета будет сводиться к решению уравнения Пуассона

$$-\Delta U = \psi(x,\ y) \tag{5}$$

при граничных условиях $U=0$ при $x=\pm 1$, $y=\pm d$. В уравнении (5)

$$\psi(x,\ y) = \frac{k\sigma}{\varepsilon}\Big[1(x+1) - 1(x+a)\Big]\sigma(y) + \frac{\delta}{\varepsilon}\Big[1(x) - 1(x-1+ + a)\Big]\delta(y),$$

где $\delta(y)$ — дельта функция, а $1(x)$ — единичная функция.

Интересующую нас зависимость $U_p(x,\ y)$ будем искать вариационным методом, сущность которого сводится к отысканию минимума функционала

$$\Phi(U) = \iint [(\operatorname{grad} U)^2 - 2U\psi]dx\cdot dy. \tag{6}$$

Последнюю задачу решим методом Ритца. Выберем в качестве решения комбинацию трех координатных функций. (Можно и больше, но это усложнит иллюстрацию решения)

$$U_p(x,\ y) = (x^2-1)(y^2-d^2)[a_1 + xa_2 + x^2a_3]. \tag{7}$$

Эти функции линейно независимы и полны по энергии.

Для нахождения минимума функционала будем вычислять производные по неизвестным переменным

$$\frac{\partial\phi}{\partial a_i} = 0,\ i = 1,\ 2,\ldots$$

что приведет к следующей системе уравнений (уравнений Ритца):

$$(\Delta\varphi_1,\ \varphi_1)a_1 = (\Delta\varphi_1,\ \varphi_2)a_2 + (\Delta\varphi_1,\ \varphi_3)a_3 = (\psi,\ \varphi_1),$$
$$(\Delta\varphi_2,\ \varphi_1)a_1 + (\Delta\varphi_2,\ \varphi_2)a_2 + (\Delta\varphi_2,\ \varphi_3)a_3 = (\psi,\ \varphi_2),$$

$$(\Delta\varphi_3, \varphi_1)a_1 + (\Delta\varphi_3, \varphi_2)a_2 + (\Delta\varphi_3, \varphi_3)a_3 = (\psi, \varphi_3).$$

Здесь φ_1, φ_2, φ_3 — множители при a_i в уравнении (7).

Выполнив соответствующие вычисления, получим систему трех уравнений

$$\frac{128d^3}{45}\left(1 + d^2\right)a_1 + \frac{128d^3}{45}\left(\frac{1}{7} + \frac{d^2}{5}\right)a_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon}\, m,$$

$$\frac{128d^3}{15}\left(\frac{1}{21} + \frac{d^2}{5}\right)a_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon}\, n,$$

$$\frac{128d^3}{15}\left(\frac{1}{7} + \frac{d^2}{5}\right)a_1 + \frac{128d^3}{315}\left(\frac{1}{3} + \frac{11d^3}{5}\right)a_3 = \frac{\sigma}{\sigma}\, p,$$

где обозначено:

$$m = \frac{d^2}{3}\left[\, k(2 - 3a + a^3) + (2 - 3a^2 + a^3)\,\right],$$

$$n = \frac{d^2}{4}\left[k(-1 + 2a^2 - a^4) + (1 + 4a - 4a^2 - a^4)\,\right],$$

$$p = \frac{d^2}{15}\left[k(2 - 5a^3 + 3a^5) + (2 - 15a^2 + 25a^3 - 15a^4 + 3a^5)\right].$$

Теперь нетрудно найти интересующие нас коэффициенты a_i, подставив которые в формулу (7) мы получим искомое решение задачи. Однако в этой формуле еще следует определить величину σ и k. Для этой цели воспользуемся дополнительными условиями, в частности, для кондукционной схемы возбуждения можно записать, что

$$U_p = U_в \text{ при } x = y = 0,$$

откуда получаем $U_в = d^2 a_1$.

Подставим найденный выше коэффициент a_1 и получим уравнение, с помощью которого можно подсчитать k.

Нагрузочный режим

Если просуммировать потенциальные функции поля статора и ротора (формулы 3 и 7), то получим уравнение, позволяющее определить результирующий потенциал в интересующих нас точках рабочего объема машины:

$$U(x, y) = U_c(x, y) + U_p(x, y). \qquad (8)$$

Уравнение (8), записанное в общем виде, содержит основные геометрические размеры машины, напряжение возбуждения и напряжение на нагрузке, поэтому оно удобно для анализа работы машины. Оказывается возможным выяснить влияние тех или иных параметров машины на ее электрические характеристики, что представляет определенный интерес для инженеров-конструкторов.

Появляется также возможность найти приближенные аналитические формулы для касательных и нормальных составляющих напряженности электрического поля для различных участков машины.

В заключение заметим, что приведенные в статье формулы следует рассматривать как иллюстрацию метода расчета поля в ЭСГ. Можно выбирать и другие, вероятно, более удачные, координатные функции для поля статора и ротора, можно принять большее количество слагаемых в них и вполне возможно учесть ряд специфических для генераторов факторов, таких как наличие поверхностных зарядов на роторе, коммутационных явлений и так далее. Появляется возможность применить приближенный метод и для расчета поля электростатических машин с диэлектрическим ротором. Однако все перечисленные вопросы сами по себе весьма интересны и до конца еще не изучены, поэтому учет их в расчетах полей требует дополнительных исследований.