ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 191 1969

О СООТНОШЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ МЕЖДУ ПОЛИНОМАМИ ЛЕЖАНДРА И ЧЕБЫШЕВА

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики).

Преобразование Лапласа экспоненциальных полиномов Лежандра и Чебышева («е»-полиномов) [3] позволяет получить ряд интегральных соотношений, связывающих как «е»-полиномы одного индекса, так и обыкновенные полиномы Лежандра и Чебышева, определением на интервале (0,1) или (−1,1).

Рассмотрим прежде представление для «е»-полинома Чебышева I рода $T_n^*(t)$.

Ранее [3] было получено соответствие

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}} T_n^*(t) \div W(p)\cdot\varphi_n(p), \tag{1}$$

где

$$W(p) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)\cdot\frac{p}{a}} \div W(t) = \frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}}, \tag{2}$$

$$\varphi_n(p) = \frac{\frac{p}{a}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{p}{a}-k\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{p}{a}+k\right)} = (-1)^{n-1}\frac{p\prod\limits_{k=1}^{n-1}(ka-p)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(ka+p)} \div \varphi_n(t). \tag{3}$$

Согласно теореме об изображении свертки можем написать

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}} T_n^*(t) = \int_0^t W(t-\tau)\varphi_n(\tau)d\tau,$$

откуда

$$T_n^*(t) = e^{\frac{at}{2}}\sqrt{1-e^{-at}}\int_0^t W(t-\tau)\varphi_n(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Займемся определением функции $\varphi_n(t)$. Ее изображение по Лапласу (3) можно представить следующим образом:

$$\varphi_n(p) = (-1)^{n-1} p \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(ka-p)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(ka+p)} = (-1)^{n-1} p[p + (n+1)a] \frac{1}{a} V_n(\ )$$

или после раскрытия скобок

$$\varphi_n(p) = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{a} p^2 V_n(p) + (n+1) p V_n(p)\right]. \qquad (5)$$

Если теперь иметь в виду, что $V_n(p)$ есть изображение по Лапласу интегрального «е»-полинома Лежандра $V_n^*(t)$ [4], т. е.

$$V_n(p) = a\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(ka-p)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(ka+p)} \risingdotseq V_n^*(t), \qquad (6)$$

то легко найдем

$$\left.\begin{aligned} pV_n(p) &\risingdotseq \frac{dV_n^*(t)}{dt} \\ p^2V_n(p) &\risingdotseq \frac{d^2V_n^*(t)}{dt^2} + V_n^{*\prime}(0)\delta(t) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Поскольку

$$V_n^{*\prime}(o) = -aP_n^*(o) = a(-1)^{n+1},$$

последнее соответствие можно записать в виде

$$p^2V_n(p) \risingdotseq \frac{d^2V_n^*(t)}{dt^2} + a(-1)^{n+1}\delta(t).$$

Дельта-функция $\delta(t)$ возникает вследствие разрыва производной $V_n^{*\prime}(t)$ при $t=0$, поскольку мы считаем, что $V_n^*(t) \equiv 0$ при $t<0$. Таким образом, искомая функция $\varphi_n(t)$ имеет вид

$$\varphi_n(t) = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{a}\frac{d^2V_n^*(t)}{dt^2} + (n+1)\frac{dV_n^*(t)}{dt}\right] + \delta(t). \qquad (8)$$

Выражение в скобках можно представить через «е»-полином Лежандра $P_n^*(t)$ и его производную.

Имеем [4]

$$\frac{dV_n^*(t)}{dt} = -ae^{-at}p_n^*(t),$$

$$\frac{d^2V_n^*(t)}{dt^2} = a^2e^{-at}P_n^*(t) - ae^{-at}\frac{dP_n^*(t)}{dt}.$$

Подстановка дает

$$\varphi_n(t) = (-1)^n e^{-at}\left[naP_n^*(t) + \frac{qP_n^*(t)}{dt}\right] + \delta(t). \qquad (9)$$

Таким образом, формула (4) получает вид

$$T_n(t) = 1 + (-1)^n e^{\frac{at}{2}}\sqrt{1-e^{-at}}\int\limits_0^t W(t-\tau)e^{-a\tau}\left[naP_n^*(\tau) + \frac{dP_n^*(t)}{d\tau}\right]d\tau. \qquad (10)$$

Это и есть искомое соотношение.

Сделаем подстановки $x=e^{-at}$ и $y=e^{-a\tau}$, тогда «е»-полином $T_n^*(t)$ преобразуется в смещенный полином Чебышева I рода $T_n^*(x)$, а «е»-полином $P_n(\tau)$ — в смещенный полином Лежандра $P_n^*(y)$ [1, 3]. Далее, имея в виду равенства

$$W(t-\tau)=\frac{e^{-\frac{a}{2}(t-\tau)}}{\sqrt{1-e^{-a(t-\tau)}}}=\frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{e^{-a\tau}-e^{-at}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y-x}},$$

$$\frac{dP_n^*(\tau)}{d\tau}=-\frac{dP_n^*(y)}{dy}y\cdot a;\quad d\tau=-\frac{dy}{y\cdot a},$$

сразу получим

$$T_n^*(x)=1-(-1)^n\sqrt{1-x}\int_1^x\frac{1}{\sqrt{y-x}}\left[nP_n^*(y)-y\frac{dP_n^*(y)}{dy}\right]dy$$

или, поменяв местами пределы, можем написать

$$T_n^*(x)=1+(-1)^n\sqrt{1-x}\int_x^1\frac{1}{\sqrt{y-x}}\left[nP_n^*(y)-y\frac{dP_n^*(y)}{dy}\right]dy \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \qquad (11)$$

Наконец, сделав замену [1, 3]

$$x\to\frac{1+x}{2}\ \text{и}\ y\to\frac{1+y}{2},$$

получим соотношение для обыкновенных полиномов

$$T_n(x)=1+\frac{(-1)^n}{2}\sqrt{1-x}\int_x^1\frac{nP_n(y)-(1-y)\frac{dP_n(y)}{dy}}{\sqrt{y-x}}dy \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \qquad (12)$$

Установим аналогичную связь между полиномом Чебышева II рода и полиномом Лежандра.

Для «е»-полинома Чебышева II рода $U_{n-1}^*(t)$, учитывая (10), а также равенство [3]

$$U_{n-1}^*(t)=-\frac{1}{2na}e^{at}\frac{dT_n^*(t)}{dt}, \qquad (13)$$

сразу получим

$$U_{n-1}^*(t)=\frac{(-1)^{n+1}}{2na}e^{at}\frac{d}{dt}\,e^{\frac{at}{2}}\sqrt{1-e^{-at}}\int_0^t W(t-\tau)e^{-a\tau}\left[naP_n^*(\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{dP_n^*(\tau)}{d\tau}\right]d\tau \qquad (14)$$

Для смещенных полиномов вместо (13) будем иметь

$$U_{n-1}^*(x)=\frac{1}{2n}\frac{dT_n^*(x)}{dx}\quad (0\leqslant x\leqslant 1). \qquad (15)$$

Таким образом, дифференцируя (11) по x и подставляя в (15), найдем

$$U_{n-1}^*(x)=\frac{(-1)^n}{2n}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x}\int_x^1\frac{nP_n^*(y)-y\frac{dP_n^*(y)}{dy}}{\sqrt{y-x}}dy \quad (0\leqslant x\leqslant 1). \qquad (16)$$

Для обыкновенных полиномов соотношение имеет вид

$$U_{n-1}(x) = \frac{(-1)^n}{n}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{nP_n(y) - (1+y)\frac{dP_n(y)}{dy}}{\sqrt{y-x}}\,dy$$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (17)$$

Полученные интегральные формулы можно записать более компактно. Введем систему «е»-полиномов

$$D_n^*(t) = \frac{1}{2}[P_n^*(t) - P^*_{n-1}(t)] \qquad (n=1, 2, \ldots), \qquad (18)$$

где $P_n^*(t)$ — «е»-полином Лежандра. Эта система является, очевидно, полной в том же гильбертовом пространстве, в каком полна система «е»-полиномов Лежандра $P_n^*(t)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ [3]. Отметим также равенства

$$D_n^*(0) = 1 \text{ и } D_n^*(\infty) = 0.$$

Покажем теперь, что

$$e^{-at}\left[naP_n^*(t) + \frac{dP_n^*(t)}{dt}\right] = \frac{dD_n^*(t)}{dt}. \qquad (19)$$

Имеет место следующее рекуррентное соотношение для «е»-полиномов Лежандра:

$$(1-2e^{-at})\frac{dP_n^*(t)}{dt} - \frac{dP^*_{n-1}(t)}{dt} = 2nae^{-at}P_n^*(t). \qquad (20)$$

Оно получается из соотношения для обыкновенных полиномов Лежандра, определенных на интервале $(-1, 1)$ [2], если сделать замену $x \to 1-2e^{-at}$. Из (20) найдем

$$e^{-at}\frac{dP_n^*(t)}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dP_n^*(t)}{dt} - \frac{dP^*_{n-1}(t)}{dt}\right] - nae^{-at}P_n^*(t)$$

или в другой форме

$$e^{-at}\frac{dP_n^*(t)}{dt} = \frac{dD^*(t)}{dt} - nae^{-at}P_n^*(t),$$

откуда непосредственно следует тождество (19). Для смещенных полиномов будем иметь $(x=e^{-at})$

$$nP_n^*(x) - x\frac{dP_n^*(x)}{dx} = \frac{dD_n^*(x)}{dx} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (21)$$

Сделав замену $x \to \frac{1+x}{2}$, получим для обыкновенных полиномов

$$nP_n(x) - (1+x)\frac{dP_n(x)}{dx} = 2\frac{dD_n(x)}{dx} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1. \quad (22)$$

Вместо соотношений (10), (11) и (12) теперь можем написать:

$$\left.\begin{aligned}
T_n^*(t) &= 1+(-1)^n e^{\frac{at}{2}}\sqrt{1-e^{-at}}\int_0^t W(t-\tau)\frac{dD_n^*(\tau)}{d\tau}d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant \infty),\\
T_n^*(x) &= 1+(-1)^n\sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\cdot\frac{dD_n^*(y)}{dy}dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).\\
T_n(x) &= 1+(-1)^n\sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\frac{dD_n(y)}{dy}dy \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).
\end{aligned}\right\} (23)$$

Аналогично могут быть записаны формулы (14), (16) и (17). Решим теперь обратную задачу, т. е. выразим полином Лежандра через полином Чебышева.

Прежде найдем преобразование Лапласа «е»-полинома $D_n^*(t)$. Имеем [3]

$$P_n^*(t) \div \prod_{k=1}^{n} \frac{ka - p}{ka + p} \quad \text{и} \quad P_{n-1}^*(t) \div \prod_{k=1}^{n-1} \frac{ka - 1}{ka + p}.$$

Таким образом,

$$D_n^*(t) = \frac{1}{2}[P_n^*(t) - P_{n-1}^*(t)] \div -\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (ka - p)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (ka + p)} = D_n(p). \quad (24)$$

Введем обозначение

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-at}}} T_n^*(t) \div \psi_n(p) = W(p) \cdot \varphi_n(p). \quad (25)$$

Учитывая (2), (3) и (24), можем написать

$$\psi_n(p) = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (ka - p)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (ka + p)} =$$

$$= (-1)^{n} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} D_n(p).$$

Откуда

$$D_n(p) = (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)} \psi_n(p) \quad (26)$$

Пусть

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)} \div f(t).$$

По теореме смещения будем иметь

$$\frac{\pi}{a} e^{-\frac{at}{2}} f(t) \div \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a} + \frac{1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{p}{a}\right) \cdot \frac{p}{a}}$$

Сравнивая с (2), приходим к выводу, что

$$f(t) = \frac{a}{\pi\sqrt{1 - e^{-at}}}. \quad (27)$$

Таким образом, переходя к оригиналам в операторном равенстве (26), получим согласно теореме свертки

$$D_n^*(t) = (-1)^n \int_0^t f(t-\tau) \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}}}{\sqrt{1-e^{-a\tau}}} T_n^*(\tau) d\tau. \tag{28}$$

или в развернутом виде

$$D_n^*(t) = \frac{(-1)^n a}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-e^{-a(t-\tau)}}} \cdot \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}}}{\sqrt{1-e^{-a\tau}}} T_n^*(\tau) d\tau \tag{29}$$

Если учесть, что [4]

$$D_n^*(t) + D_{n+1}^*(t) = \frac{1}{2} [P_{n+1}^*(t) - P_{n-1}^*(t)] = -(2n+1) V_n^*(t), \tag{30}$$

легко найдем

$$V_n^*(t) = \frac{(-1)^{n+1} a}{\pi(2n+1)} \int_0^t \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}} [T_{n+1}^*(\tau) - T_n^*(\tau)]}{\sqrt{1-e^{-a(t-\tau)}} \sqrt{1-e^{-a\tau}}} d\tau \tag{31}$$

Наконец, из тождества

$$\frac{dV_n^*(t)}{dt} = -ae^{-at} P_n^*(t).$$

Следует соотношение для «е»-полиномов

$$P_n^*(t) = \frac{(-1)^n e^{at}}{\pi(2n+1)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{-\frac{a\tau}{2}} [T_{n+1}^*(\tau) - T_n^*(\tau)]}{\sqrt{1-e^{-a(t-\tau)}} \sqrt{1-e^{-a\tau}}} d\tau. \tag{32}$$

Для смещенных полиномов, выполнив замену $x = e^{-at}$ и $y = e^{-a\tau}$, будем иметь

$$P_n^*(x) = \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)} \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{T_{n+1}^*(y) - T_n^*(y)}{\sqrt{(y-x)(1-y)}} dy \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{33}$$

Для обыкновенных полиномов соотношение получает вид

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n 2}{\pi(2n+1)} \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{T_{n+1}(y) - T_n(y)}{\sqrt{(y-x)(1-y)}} dy \quad (-1 \leqslant x \leqslant y) \tag{34}$$

В заключение отметим, что все полученные соотношения легко могут быть проверены непосредственным интегрированием.

ЛИТЕРАТУРА

1. **К. Ланцош.** «Практические методы прикладного анализа». Физматгиз, М., 1961.
2. **Н. Н. Лебедев.** «Специальные функции и их приложения». Физматгиз, М.-Л., 1963.
3. **В. М. Осипов.** «Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов», Изв. ТПИ, том 180, Томск, 1969.
4. **В. М. Осипов.** «К вопросу о приближенном обращении преобразования Лапласа». (Настоящий том).