ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 191 1969

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ ОБРАЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики).

Во многих случаях обращение преобразования Лапласа по классической схеме, т. е. путем вычисления контурного интеграла Бромвича, выполнить затруднительно. Так, в случае, когда преобразование Лапласа задано в виде рациональной дроби, обращение сводится к определению корней алгебраического уравнения, что является технически трудновыполнимой задачей, особенно при высокой степени уравнения. Кроме того, часто возникает задача аппроксимации трансцендентных операторных изображений более удобными разложениями в виде рациональных дробей.

Ниже излагаются методы приближенного решения задачи обращения и аппроксимации, практически удобные и достаточно эффективные для широкого класса операторных изображений.

1. Обращение с помощью «е»-функций Чебышева III рода

Экспоненциальные функции Чебышева III рода [4]

$$S_n(t) = 2e^{-\frac{at}{2}}\sqrt{1-e^{-at}}\ U^*_{n-1}(t) \qquad (n=1, 2, \ldots), \qquad (1\text{-}1)$$

где $U_{n-1}^*(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — «е»-полиномы Чебышева II рода, являясь собственными функциями самосопряженного дифференциального оператора, образуют на интервале $(0, \infty)$ полную ортогональную систему с весовым множителем

$$W(t) = e^{-\frac{at}{2}}(1-e^{-at})^{-\frac{1}{2}}.$$

Другими словами, ряд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k S_k(t), \qquad (1\text{-}2)$$

где

$$B_k = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{at}{2}} f(t)}{\sqrt{1-e^{-at}}} S_k(t)dt \qquad (k=1, 2, \ldots) \qquad (1\text{-}3)$$

сходится во всякой внутренней точке, являющейся точкой непрерывности $f(t)$, если выполнено условие

$$\int_0^\infty W(t)[f(t)]^2 dt < \infty . \qquad (1\text{-}4)$$

В точках разрыва I рода $t=t_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$) ряд (1-2) сходится к значению $\frac{1}{2}[f(t_i + 0) - f(t_i - 0)]$.

Коэффициенты B_k очень просто связаны с преобразованием Лапласа разлагаемой функции $f(t)$.

Введем понятие об экспоненциальном моменте функции $f(t)$. Это вещественная величина, определяемая выражением

$$M^*_{k-1} = \int_0^\infty e^{-kat} f(t) dt \qquad (k=1, 2, \ldots). \qquad (1\text{-}5)$$

Пусть $F(p)$ есть преобразование Лапласа функции $f(t)$, т. е.

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Сравнивая с (1-5), приходим к выводу, что

$$M^*_{k-1} = F(ka) \quad \text{или} \quad M^*_k = F[(k \pm 1)a]. \qquad (1\text{-}6)$$

Таким образом, экспоненциальный момент k-го порядка функции $f(t)$ равен преобразованию Лапласа этой функции при $p=(k+1)a$. Подставим (1-1) в (1-3), тогда получим следующую формулу для коэффициента B_k:

$$B_k = \frac{4a}{\pi} \int_0^\infty e^{-at} f(t) U^*_{k-1}(t) dt. \qquad (1\text{-}7)$$

Явное выражение для «е»-полинома $U_{k-1}^*(t)$ имеет вид [4]

$$U^*_{k-1}(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \beta_{kn} e^{-nat},$$

где

$$(1\text{-}8)$$

$$\beta_{kn} = \frac{(-1)^{n+k-1} 2^n (n + k)!}{(2n + 1)(k - 1 - n)! n! (2n-1)!!} . \qquad (1\text{-}9)$$

Таким образом,

$$B_k = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \beta_{kn} M^*_n \qquad (k=1, 2, 3, \ldots), \qquad (1\text{-}10)$$

т. е. коэффициент B_k есть линейная комбинация «k» первых экспоненциальных моментов. (1-10) можно записать в матричной форме

$$\bar{B} = \frac{4a}{\pi} \beta \bar{M}^*, \qquad (1\text{-}11)$$

где вектор $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_m, \ldots\}$, а вектор $M^* = \{M_0^*, M_1^*, \ldots, M_m^*, \ldots\}$.

Коэффициенты треугольной матрицы β до $k=8$ включительно даны в приложении ПI; они же являются коэффициентами «е»-полиномов $U_{k-1}^*(t)$ ($k=1, 2, \ldots, 8$). Ряд (1-2) будет сходиться значительно быстрее, если $f(0) = f(\infty) = 0$. Это условие означает, что изображение $F(p)$ функции $f(t)$ не имеет полюсов в начале координат и на мнимой оси и, кроме того, существует предел

$$\lim_{p\to\infty} p\,F(p) = o.$$

Пусть $\Phi(p)$ есть изображение по Лапласу функции $\varphi(t)$. В общем случае $\varphi(0) \neq o$ и $\varphi(\infty) \neq o$, тогда вместо (1-2) следует писать

$$\varphi(t) = \varphi(0)e^{-\frac{at}{2}} + \varphi(\infty)(1 - e^{-\frac{at}{2}}) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k S_k(t). \qquad (1\text{-}12)$$

Обозначим

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(0)e^{-\frac{at}{2}} - \varphi(\infty)(1 - e^{-\frac{at}{2}}) \qquad (1\text{-}13)$$

или в операторной форме $[\Phi(p) \doteqdot \varphi(t)]$

$$F(p) = \Phi(p) - \frac{\varphi(0)}{p + \frac{a}{2}} - \frac{\frac{a}{2}\varphi(\infty)}{p\left(p + \frac{a}{2}\right)}, \qquad (1\text{-}14)$$

причем $f(0) = f(\infty) = 0$. Дело свелось, таким образом, к нулевым граничным условиям.

Найдем изображение по Лапласу «е»-функции $S_k(t)$. Поскольку подстановка

$$e^{-\frac{at}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}, \text{ т. е. } \alpha = 2\arccos e^{-\frac{at}{2}},$$

превращает $S_k(t)$ в $\sin k\alpha$, а $T_k^*(t)$ — «е»-полином Чебышева I рода в $\cos k\alpha$ [4], то легко получим

$$\frac{dS_k(t)}{dt} = ka\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}}T^*_k(t). \qquad (1\text{-}15)$$

Имеем [4]

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-e^{-at}}}T^*_k(t) \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \frac{\prod_{n=1}^{k-1}\left(\frac{p}{a}-n\right)}{\prod_{n=1}^{k}\left(\frac{p}{a}+n\right)}.$$

Таким образом,

$$S_k(t) \doteqdot (-1)^{k-1}\frac{ka\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{2}\right)}{p\,\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \frac{\prod_{n=1}^{k-1}(na-p)}{\prod_{n=1}^{k}(na+p)}, \qquad (1\text{-}16)$$

причем $\prod_{n=1}^{0} \equiv 1$.

Преобразуя по Лапласу ряд (1-2), можем написать

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k S_k(t) = \frac{a\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kB_k \times$$

$$\times\frac{\prod_{n=1}^{k-1}(na-p)}{\prod_{n=1}^{k}(na+p)}. \qquad (1\text{-}17)$$

Положим теперь $p=ma$ $(m=1, 2, \ldots)$, тогда будем иметь бесконечную систему линейных уравнений для определения B_k

$$M^*_{m-1} = F(ma) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{am\Gamma(m)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k B_k \frac{\prod_{n=1}^{k-1}(n-m)}{\prod_{n=1}^{k}(n+m)},$$

которая в развернутом виде принимает удобную треугольную форму, так как $\prod_{n=1}^{k-1}(n-m)=0$ при $m \leqslant k-1$. Имея в виду, что

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{am\Gamma(m)} = \frac{\pi}{4a}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{2^{m-2}m!},$$

получим

$$\frac{4a}{\pi} M^*_0 = B_1$$

$$\frac{4a}{\pi} M_1^* = \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{4} B_2$$

$$\frac{4a}{\pi} M^*_2 = \frac{5}{16} B_1 + \frac{1}{4} B_2 + \frac{1}{16} B_3$$

$$\frac{4a}{\pi} M^*_3 = \frac{7}{32} B_1 + \frac{7}{32} B_2 + \frac{3}{32} B_3 + \frac{1}{64} B_4$$

или в матричной форме

$$\frac{4a}{\pi} \overline{M}^* = \beta^{-1}\overline{B},$$

откуда следует (1-11). Таким образом, матрица коэффициентов системы (1-18) или (1-19) есть матрица, обратная ранее введенной матрице β с элементами (1-9). Другими словами, коэффициенты Фурье ортогонального разложения (1-2) можно определить в результате интерполяционного процесса в комплексной области, в котором узлами интерполирования служат нули операторного изображения $S_m(p)$, т. е. нули первого из отброшенных членов в усеченном операторном ряде (1-17).

2. Обращение с помощью интегральных «е»-полиномов Лежандра

Обращение в виде отрезка ряда по экспоненциальным функциям Чебышева III рода содержит иррациональный множитель вида $\sqrt{1-e^{at\,x}}$, что затрудняет аналитические операции с этим выражением. Применение для целей обращения «е»-полиномов Лежандра $P_n^*(t)$ [4] с этой точки зрения оказывается более удобным. Однако разложение по «е»-полиномам $P_n^*(t)$ сходится значительно медленнее, чем разложение (1-2). Этот недостаток может быть заметно ослаблен, если воспользоваться так называемыми интегральными «е»-полиномами Лежандра $V_n^*(t)$, которые позволяют значительно точнее восстановить функцию по заданному числу экспоненциальных моментов, так как граничные условия удовлетворяются независимо от коэффициентов разложения.

Интегральные полиномы Лежандра, рассмотренные нами в [3], определены для интервала (0, 1), однако простой подстановкой $x=e^{-at}$ они преобразуются в «е»-полиномы $V_n^*(t)$

$$V_n^*(x) \to V_n^*(e^{-at}) = V_n^*(t) \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

Основные функциональные соотношения сохраняют свой вид, однако необходимо учитывать, что

$$\frac{dV^*_n(t)}{dt} = \frac{dV^*_n(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\Big/_{x=e^{-at}}$$

В частности, будем иметь [3]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV^*_n(t)}{dt} &= -ae^{-at}P_n^*(t) \\ V_n^*(t) &= -a\int_0^t e^{-at}P_n^*(t)dt \end{aligned}\right\}, \tag{2-1}$$

$$2(2n+1)\,V_n^*(t) = P_{n-1}^*(t) - P_{n+1}^*(t), \tag{2-2}$$

$$V_n^*(t) = e^{-at}(1-e^{-at})F(-n+1,\ n+2;\ 2;\ e^{-at}), \tag{2-3}$$

$$V_n^*(t) = \frac{1-e^{-at}}{an(n+1)}\ \frac{dP_n^*(t)}{dt}, \tag{2-4}$$

где $P_n^*(t)$ — «е»-полином Лежандра [4].

Полиномы $V_n^*(t)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$(1-e^{-at})\left[\frac{d^2V_n^*(t)}{dt^2} + a\frac{dV_n^*(t)}{dt}\right] + a^2n(n+1)e^{-at}V_n^*(t) = 0 \tag{2-5}$$

и образуют на интервале $(0, \infty)$ полную ортогональную систему с весом $\dfrac{1}{1-e^{-at}}$, т. е.

$$\int_0^\infty \frac{V_n^*(t)V_m^*(t)}{1-e^{-at}}dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)a} & n = m, \end{cases} \tag{2-6}$$

причем $V_n^*(o) = V_n^*(\infty) = o$.

Явное выражение для «е»-полиномов $V_n^*(t)$ можно получить, развертывая гипергеометрический ряд в (2-3),

$$V_n^*(t) = \frac{e^{-at}(1-e^{-at})}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)!k!(k+1)!}e^{-kat}, \tag{2-7}$$

Для нескольких первых значений «n» будем иметь

$$\left.\begin{aligned} V_1^*(t) &= e^{-at}(1-e^{-at}), \\ V_2^*(t) &= e^{-at}(1-e^{-at})(1-2e^{-at}), \\ V_3^*(t) &= e^{-at}(1-e^{-at})(1-5e^{-at}+5e^{-2at}), \\ V_4^*(t) &= e^{-at}(1-e^{-at})(1-9e^{-at}+21e^{-2at}-14e^{-3at}), \\ V_5^*(t) &= e^{-at}(1-e^{-at})(1-14e^{-at}+56e^{-2at}-84e^{-3at}+42e^{-4at}) \\ &\text{— — — — — — — — — — — — —} \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

Найдем преобразование Лапласа полинома $V_n^*(t)$. Введем обозначения: $V_n(p) \risingdotseq V_n^*(t)$ и $P_n(p) \risingdotseq P_n^*(t)$. Согласно (2-2) можем написать

$$2(2n+1)V_n(p) = P_{n-1}(p) - P_{n+1}(p) \quad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{2-9}$$

Имеем [4]

$$P_{n-1}(p) = \frac{1}{p}\prod_{k=0}^{n-2}\frac{(k+1)a-p}{(k+1)a+p},$$

$$P_{n+1}(p) = \frac{1}{p}\prod_{k=0}^{n}\frac{(k+1)a-p}{(k+1)a+p}.$$

Формула (2-9) дает после преобразований

$$V_n(p) = a\frac{\prod_{k=0}^{n-2}[(k+1)a-p]}{\prod_{k=0}^{n}[(k+1)a+p]} = \frac{a(a-p)(2a-p)\cdots[(n-1)a-p]}{(a+p)(2a+p)\cdots[(n+1)a+p]},$$

причем $\prod_{k=0}^{n-2}[k+1)a-p] = 1$ при $n=1$.

Рассмотрим вопрос о разложении произвольной функции $f(t)$ в ряд по интегральным полиномам $V_n^*(t)$. Предположим, что

$$f(0) = f(\infty) = 0. \qquad (2\text{-}11)$$

В силу полноты системы $V_n^*(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ можем написать

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_n^*(t) \qquad (2\text{-}12)$$

Умножим обе стороны (2-12) на $\dfrac{V_m^*(t)}{1-e^{-at}}$ и проинтегрируем в пределах $(0, \infty)$. Учитывая свойства (2-6), будем иметь

$$C_n = n(n+1)(2n+1)a\int_0^{\infty}\frac{f(t)V_n^*(t)}{1-e^{-at}}\,dt,$$

или, подставляя выражение (2-4),

$$C_n = (2n+1)\int_0^{\infty} f(t)\frac{dP_n^*(t)}{dt}\,dt. \qquad (2\text{-}13)$$

Наконец, если учесть развернутое представление (2-7), получим

$$\frac{C_n}{n(n+1)(2n+1)a} = \sum_{k=0}^{n-1}\eta_{nk}M_k^* \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (2\text{-}14)$$

где M_k^* — экспоненциальный момент «k»-го порядка функции $f(t)$, а

$$\eta_{nk} = (-1)^k\frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)!k!(k+1)!n(n+1)}. \qquad (2\text{-}15)$$

Или в матрично-векторной форме

$$\overline{C} = \eta\overline{M}^*, \qquad (2\text{-}16)$$

где η — треугольная матрица с компонентами (2-15), причем $\eta_{nk}=0$ при $k>n-1$, а $\overline{C}$ и $\overline{M}^*$ — вектора коэффициентов и моментов соответственно, т. е.

$$\overline{C} = \left\{\frac{C_1}{6a}, \frac{C_2}{30a}, \ldots \frac{C_n}{n(n+1)(2n+1)a} \ldots\right\},$$

$$\overline{M}^* = \{M_0^*, M_1^*, \ldots, M_{n-1}^*, \ldots\}.$$

В приложении приведена матрица η для $n=8$ включительно. Коэффициенты Фурье в разложении (2-12) могут быть найдены в результате интерполирования в области операторных изображений аналогично тому, как это делалось для коэффициентов разложения (1-2).

Отметим, что если функция $\varphi(t)$, подлежащая определению по своему операторному изображению $\varphi(p)$, не обращается в нуль на границах интервала, т. е. $\varphi(0) \neq o$ и $\varphi(\infty) \neq o$, то она ищется в виде

$$\varphi(t) = \varphi(0)e^{-at} + \varphi(\infty)(1 - e^{-at}) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_n^*(t). \qquad (2\text{-}17)$$

Коэффициенты разложения C_n $(n=1, 2, \ldots)$ в этом случае определяются для функции

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(0)e^{-at} - \varphi(\infty)(1 - e^{-at}),$$

изображение по Лапласу, которой имеет вид

$$F(p) = \varphi(p) - \frac{\varphi(0)}{p + a} - \frac{a\varphi(\infty)}{p(p + a)}.$$

Другими словами, экспоненциальные моменты в этом случае должны определяться по формуле

$$M^*_{n-1} = F(na) = \frac{\varphi(0)}{(n + 1)a} - \frac{\varphi(\infty)}{n(n + 1)a} \ (n = 1, 2 \ldots)^3 \qquad (2\text{-}18)$$

а $\varphi(0)$ и $\varphi(\infty)$ могут быть найдены по теоремам о начальном и предельном значениях.

Практически для целей обращения преобразования Лапласа удобней пользоваться нормированными интегральными «е»-полиномами Лежандра $\overline{V}_n^*(t)$ [3]:

$$\overline{V_n}^*(t) = \frac{2^n(n + 1)\left[\Gamma\left(\frac{n + 1}{2}\right)\right]^2}{(n - 1)!} V_n^*(t). \qquad (2\text{-}19)$$

Для этих полиномов имеет место оценка

$$|\overline{V}_n^*(t)| \leqslant 1 \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

Если разложение по «е»-полиномам $V_n^*(t)$ представить в виде

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{m} A_n \overline{V}_n^*(t), \qquad (2\text{-}20)$$

то коэффициенты A_n будут связаны с коэффициентами C_n следующей формулой:

$$A_n = \frac{(n - 1)!}{2^n(n + 1)\left[\Gamma\left(\frac{n + 1}{2}\right)\right]^2} C_n. \qquad (2\text{-}21)$$

Преобразуя по Лапласу (2-20), получим, учитывая (2-10) и (2-19),

$$F(p) \approx \sum_{n=1}^{m} A_n \frac{2^n(n + 1)\left[\Gamma\left(\frac{n + 1}{2}\right)\right]^2 a}{(n - 1)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-2}[(k + 1)a - p}{\prod_{k=0}^{n}[(k + 1)a + q},$$

т. е. операторное изображение $F(p)$ аппроксимируется конечным разложением, каждый член которого есть рациональная дробь.

3. Определение параметра «а»

До сих пор мы совершенно не касались вопроса о величине вещественного параметра «а». Можно строго показать, что бесконечные ряды вида (1-2) или (2-20) будут сходиться и представлять искомую функцию при любом конечном значении параметра «а». Обращение преобразования Лапласа с помощью экспоненциальных функций при $a=1$ рассмотрено в [1, 2]. Между тем значение параметра «а» оказывает существенное влияние на точность аппроксимации искомого оригинала отрезком ряда по функциям $S_k(t)$ или «е»-полиномам $V_n^*(t)$. Поэтому значение $a=1$ не может, в общем случае, обеспечить нужную точность аппроксимации оригинала конечным числом членов ряда. Для этого потребовалось бы практически неприемлемое число членов. Ряды (1-2) и (2-12) асимптотически (т. е. при больших значениях t) с точностью до постоянного множителя стремятся к нулю как экспоненты $e^{-\frac{at}{2}}$ или e^{-at} соответственно, следовательно, параметр «а» должен быть определен таким образом, чтобы скорость затухания оригинала $f(t)$ при больших значениях t приблизительно равнялась скорости затухания экспоненты $e^{-\frac{at}{2}}$ или e^{-at}.

Если преобразование Лапласа задано в виде рациональной дроби, то соответствующий оригинал представляется в виде суммы экспонент с комплексными показателями в общем случае. Скорость затухания такого оригинала определяется членом, у которого показатель имеет наименьшую вещественную часть (α). Этот показатель может быть выделен по методу, описанному в [5]. Параметр «а» в этом случае равен, очевидно, 2α или α в зависимости от того, какие функции используются для представления оригинала. Сущность упомянутого метода состоит в том, что моменты оригинала, т. е. величины

$$m_k = \int_0^\infty t^k f(t)dt \qquad (к= 0, 1, 2,...),$$

с ростом k все в большей степени определяются конечным участком кривой $f(t)$, причем характер изменения моментной последовательности позволяет судить о характере кривой $f(t)$ при больших значениях t [5]. Эта идея с успехом может быть применена для определения параметра «а» в том случае, когда заданное изображение не является рациональной дробью. Пусть заданное изображение $F(p)$ некоторого оригинала $f(t)$ является аналитической функцией во всей правой полуплоскости, включая и мнимую ось, тогда в окрестностях начала координат существуют все производные. Предположим, что все они отличны от нуля.

В этом случае

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Учитывая, что

$$F^{(k)}(0) = (-1)^k \int_0^\infty t^k f(t)\,dt = (-1)^k m_k. \qquad (3\text{-}1)$$

Можем найти последовательность моментов m_k ($k=1, 2, \ldots, n$) или последовательность величин $M_k = \frac{1}{k!} m_k = \frac{(-1)^k}{к!} F^{(k)}(0)$. Если эта последовательность монотонно изменяется без перемены знака, то это означает, что оригинал $f(t)$ при больших значениях t стремится к нулю приблизительно по закону экспоненты $e^{-\alpha t}$. В этом случае для достаточно больших значений k

$$\alpha \approx \frac{M_k}{M_{k+1}}. \qquad (3\text{-}2)$$

Если же моментная последовательность M_k ($k=1, 2, \ldots$) меняет знак, то стремление к нулю оригинала имеет колебательный характер, причем огибающая этого колебательного процесса приблизительно меняется по экспоненциальному закону. В этом случае [5]

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{|M_{k+2}\cdot M_{k-1} - M_{k+1}\cdot M_k|}{M^2_{k+1} - M_k\cdot M_{k+2}}. \qquad (3\text{-}3)$$

Таким образом, $a=2\alpha$, если для целей обращения используются «е»-функции $S_n(t)$ и $a=\alpha$, если применяются «е»-полиномы $V_n^*(t)$.

Иногда значение α, определяемое формулой (3-2), не стабилизируется с ростом k. Это означает, что искомый оригинал при больших значениях t заметно отличается от экспонеты. В этом случае параметр «a» может быть найден следующим приемом. В ряде (1-17) ограничимся всего двумя членами, т. е. положим

$$F(p) \approx B_1S_1(p) + B_2S_2(p). \qquad (3\text{-}4)$$

При $p=o$ будем иметь

$$F(0) \approx \frac{\pi}{a}(B_1 - B_2).$$

Учитывая, что

$$B_1 = \frac{4a}{\pi} F(a) \text{ и } B_2 = \frac{4a}{\pi} [-2F(a) + 4F(2a)],$$

получим

$$\frac{1}{4} F(0) = 3F(a) - 4F(2a). \qquad (3\text{-}5)$$

Решая любым приближенным методом уравнение (3-5), найдем некоторое значение «a», которое и следует принять за расчетное.

Идея, лежащая в основе этого приема, состоит в том, что поведение оригинала при больших значениях t определяется поведением его изображения по Лапласу в окрестностях начала координат, поэтому, определив параметры отрезка разложения (3-4) из условия равенства значениям $F(p)$ при $p=o$, a, 2a, мы сформируем в основном те значения оригинала, которые соответствуют большим значениям t.

Заметим, что найденное значение «a» следует уменьшить в два раза, если для целей обращения используются интегральные «е»-полиномы Лежандра $V_n^*(t)$. В качестве примера рассмотрим обращение преобразования Лапласа, являющегося трансцендентной функцией переменного p.

Пусть операторное изображение некоторой функции $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(p) = \frac{\exp\left(\frac{b}{p+\beta}\right)}{p+\beta}. \qquad (1\text{-}1)$$

Найдем приближенное выражение для оригинала. (I-I), запишем в виде

$$(p+\beta)\varphi(p) = \exp\left(\frac{b}{p+\beta}\right).$$

Дифференцирование этого выражения с учетом (I-I) дает тождество

$$(p+b+\beta)\,\varphi(p)+(p+\beta)^2\varphi'(p)=o. \qquad (1\text{-II})$$

Продифференцируем его k раз и положим p=0. Учитывая, что

$$\frac{d^{\kappa}}{dp^{\kappa}}(p+b+\beta)\varphi(p) = (\upsilon+b+\beta)\varphi^{(k)}(p)+k\varphi^{(k-1)}(p),$$

$$\frac{d^{\kappa}}{dp^{\kappa}}(p+\beta)^2\varphi'(p) = (p+\beta)^2\varphi^{(\kappa+1)}(p)+2k(p+\beta)\varphi^{(\kappa)}(p)+\kappa(\kappa-1)\varphi^{(\kappa-1)}(p),$$

получим следующее рекуррентное соотношение для производных в начале координат:

$$k^2\varphi^{(k-1)}(0)+[(2k+1)\beta+b]\varphi^{(k)}(0)+\beta^2\varphi^{(k+1)}(0)=o. \qquad (\text{I-III})$$

Положим для определенности $b=\beta=1$, тогда соотношение получит вид

$$k^2\varphi^{(k-1)}(0)+2(k+1)\varphi^{(k)}(0)+\varphi^{(k+1)}(0)=o \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Последовательно легко найдем $\varphi'(o)$, $\varphi''(o)$, ..., а затем и величины

$$M_{\kappa}=\frac{(-1)^{\kappa}\varphi^{(\kappa)}(0)}{k!}.$$

Расчеты дают:

$M_1=2\,\varphi(0)$; $M_2=3{,}5\,\varphi(0)$; $M_3=8{,}5\,\varphi(0)$; $M_4=8{,}7\,\varphi(0)$; $M_5=12{,}8\,\varphi(0)$; $M_6=18{,}5\,\varphi(0)$; $M_7=26\,\varphi(0)$; $M_8=35{,}9\,\varphi(0)$; $M_9=48{,}5\,\varphi(0)$; $M_{10}=64{,}8\,\varphi(0)$. Моментная последовательность монотонно изменяется без перемены знака, следовательно, можем воспользоваться формулой (3-2). Для различных значений k формула дает

$$\frac{M_4}{M_5}=0{,}68;\quad \frac{M_5}{M_9}=0{,}69;\quad \frac{M_6}{M_7}=0{,}71;\quad \frac{M_7}{M_8}=0{,}725.$$

$$\frac{M_8}{M_9}=0{,}74;\quad \frac{M_9}{M_{10}}=0{,}75.$$

Таким образом, с ростом k значение α не стабилизируется. Найдем «а» из уравнения (3-5). Поскольку

$$\lim_{p\to\infty} p\,\varphi(p)=1,$$

будем иметь

$$F(p)=\varphi(p)-\frac{1}{p+\frac{a}{2}}=\frac{1}{p+1}\,e^{\frac{1}{p+1}}-\frac{2}{2p+a},$$

откуда легко получим

$$F(0)=e-\frac{2}{a},$$

$$F(a)=\frac{1}{a+1}\,e^{\frac{1}{a+1}}-\frac{2}{3a},$$

$$F(2a)=\frac{1}{2a+1}\,e^{\frac{1}{2a+1}}-\frac{2}{5a}.$$

Уравнение (3-5) получает вид

$$\frac{1}{4}e-\frac{1}{10a}=\frac{3}{a+1}\,e^{\frac{1}{a+1}}-\frac{4}{2a+1}\,e^{\frac{1}{2a+1}}.$$

Приближенное значение положительного корня этого уравнения, т. е. параметра «а», равно 1,09 (расчет производился на счетной линейке). Расчет первых 6 экспоненциальных моментов приведен в табл. 1. Там же приводится значение коэффициентов B_n для разложения по «е»-функциям Чебышева III рода $S_n(t)$. Если ограничиться 4 членами, то искомый оригинал запишется в виде

$$\varphi(t) \approx e^{-0,545\,t} + 0,22266\,S_1(t) - 0,0917\,S_2(t) + 0,00565\,S_3(t) + 0,0054\,S_4(t),$$

причем максимальная абсолютная ошибка будет не более 0,0015.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{1,09\,n+1}$	0,478468	0,314465	0,234192	0,186567	0,155038	0,132625
$e^{\frac{1}{1,09n+1}}$	1,613601	1,369527	1,263886	1,2051050	1,1677032	1,141822
$\varphi(na)$	0,772057	0,430668	0,295992	0,224833	0,1810392	0,151435
$\frac{2}{1,09(2n+1)}$	0,611620	0,366972	0,262123	0,203873	0,166805	0,141143
M^*_{n-1}	0,160437	0,063696	0,033868	0,020959	0,014233	0,010292
B_n	0,222659	—0,091720	0,005652	—0,005428	—0,001328	—0,000215

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{0,545n+1}$	0,647249	0,47846	0,37950	0,31446	0,26845	0,23419
$e^{\frac{1}{0,545n+1}}$	1,91027	1,61360	1,46156	1,36952	1,30794	1,26388
$\varphi(na)$	1,23642	0,77205	0,55467	0,43066	0,35112	0,29599
$\frac{1}{0,545(n+1)}$	0,91743	0,61162	0,45871	0,36697	0,30381	0,26212
M^*_{n-1}	0,318995	0,1604372	0,09595	0,06369	0,04531	0,03386
A_n	0,2615	—0,00325	—0,00974	—0,00708	— 0,0044	— 0,0035

В табл. 2 приведены результаты расчета коэффициентов для представления оригинала в виде отрезка ряда по нормированным интегральным «е»-полиномам $\overline{V}_n^*(t)$. Значение параметра «а» в этом случае равно 0,545. Приближенное представление имеет вид

$$\varphi(t) \approx e^{-0,545\,t} + 0,26156\,\overline{V}_1^*(t) - 0,00325\,\overline{V}_2^*(t) - 0,00974\,\overline{V}_3^*(t) - \\ - 0,00708\,\overline{V}_4^*(t) - 0,0044\,\overline{V}_5^*(t).$$

В заключение отметим, что точное значение оригинала равно

$$\varphi(t) = e^{-t} I_0(2\sqrt{t}).$$

где $I_0(2\sqrt{t})$ — модифицированная цилиндрическая функция нулевого порядка. Отметим также, что вычисление экспоненциальных моментов M_{n-1}^* должно производиться с весьма высокой степенью точности в связи с быстрым ростом элементов матриц β и η, в то время как для определения параметра «а» достаточно точности обычной счетной линейки.

Приложение ПI

1. Матрица β

$$\beta_{kn} = \frac{(-1)^{n+\kappa-1} 2^n (n+\kappa)!}{(2n+1)(k-n-1)!\,n!\,(2n-1)!!}$$

1							
—2	4						
3	—16	16					
—4	40	—96	64				
5	—80	336	—512	256			
—6	140	—896	2304	—2560	1024		
7	—224	2016	—7680	14080	—12288	4096	
—8	336	—4032	21120	—56320	79872	—57344	16384

2. Матрица η

$$\eta_{nk} = (-1)^{\kappa} \frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)!\,\kappa!\,(\kappa+1)!\,n(n+1)}$$

1							
1	—2						
1	—5	5					
1	—9	21	—14				
1	—14	56	—84	42			
1	—20	120	—300	330	—132		
1	—27	225	—825	1485	—1287	429	
1	—35	385	—1925	5005	—7007	5005	—1430

ЛИТЕРАТУРА

1. **Г. Дёч**. «Руководство к практическому применению преобразования Лапласа». «Наука», М., 1965.
2. **К. Ланцош.** «Практические методы прикладного анализа». Физматизд., М., 1961.
3. **В. М. Осипов.** «Интегральные полиномы Лежандра и приближение функций». (Настоящий том).
4. **В. М. Осипов.** «Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов». Изв. ТПИ, том 180, Томск, 1969.
5. **В. М. Осипов.** «Определение нулей и полюсов передаточной функции минимально-фазового типа методом моментальных последовательностей». Изв. ТПИ, том 192, Томск, 1969.