ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 191 1969

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики).

I. Интегральные полиномы Лежандра

Обыкновенные полиномы Лежандра могут быть определены формулой Родрига

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1) \quad (-1 \leqslant z \leqslant 1). \tag{1-1}$$

Заменой переменного $z = 1 - 2x$ интервал $(-1, 1)$ преобразуется в интервал $(0, 1)$, и мы получаем так называемые смещенные полиномы Лежандра [1]

$$P_n^*(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^n(1 - x)^n. \tag{1-2}$$

Явное выражение для $P_n^*(x)$ можно получить из представления через гипергеометрическую функцию

$$P_n^*(x) = F(-n, n + 1; 1; x) = \sum_{\kappa=0}^{n} (-1)^k \frac{(n + k)!}{(\kappa!)^2(n - \kappa)!} x^\kappa. \tag{1-3}$$

Введем новую систему полиномов по формуле

$$V_n^*(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^n(1 - x)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1-4}$$

т. е.

$$\frac{dV_n^*(x)}{dx} = P_n^*(x) \tag{1-5}$$

или

$$V_n^*(x) = \int_0^x P_n^*(x)dx. \tag{1-6}$$

Эти полиномы мы будем называть интегральными смещенными полиномами Лежандра. Рассмотрим их основные свойства. Прежде найдем их представление через гипергеометрическую функцию. Известно следующее тождество:

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+c-1}(1 - x)^{b-1}] = (c)_n x_c^{-1}(1 - x)^{b-c-n} F(-n, b; c; x). \tag{1-7}$$

Заменяя n на $n-1$ и полагая $c=2$; $b=n+2$, получим

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^n(1-x)^n = n!\, x(1-x)F(-n+1,\ n+2;\ 2;\ x)$$

и, следовательно,

$$V_n^*(x) = x(1-x)F(-n+1,\ n+2;\ 2;\ x), \tag{1-8}$$

откуда непосредственно видно, что

$$V_n^*(0) = V_n^*(1) = 0. \tag{1-9}$$

Если развернуть гипергеометрический ряд в (1-8), то получим явное выражение для $V_n^*(x)$

$$V_n^*(x) = \frac{x(1-x)}{n(n+1)} \sum_{к=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n+к+1)!x^k}{(n-к-1)!(к+1)!к!}. \tag{1-10}$$

Для нескольких первых значений «n» будем иметь

$$\begin{aligned}
V_1^*(x) &= x(1-x), \\
V_2^*(x) &= x(1-x)(1-2x), \\
V_3^*(x) &= x(1-x)(1-5x+5x^2), \\
V_4^*(x) &= x(1-x)(1-9x+21x^2-14x^3), \\
V_5^*(x) &= x(1-x)(1-14x+56x^2-84x^3+42x^4).
\end{aligned}$$

— — — — — — — — — — — —

Продифференцируем (1-3)

$$\frac{dP_n^*(x)}{dx} = \frac{d}{dx} F(-n,\ n+1;\ 1;\ x) = \frac{(-n)_1(n+1)_1}{(1)_1} F(-n+1, n+2;\ 2;\ x)$$

Поскольку

$$\frac{(-n)_1\,(n+1)_1}{(1)_1} = -n(n+1),$$

можно написать

$$-\frac{1}{n(n+1)} \frac{dP_n^*(x)}{dx} = F(-n+1,\ n+2;\ 2; x)$$

Подставляя полученное выражение в (1-8), будем иметь

$$n(n+1)V_n^*(x) = -x(1-x)\frac{dP_n^*(x)}{dx}. \tag{1-11}$$

Из (1-5) следует с учетом (1-11)

$$\frac{d^2V_n^*(x)}{dx^2} = \frac{dP_n^*(x)}{dx} = -\frac{n(n+1)}{x(1-x)} V_n^*(x).$$

или в другой форме

$$x(1-x)\frac{d^2V_n^*(x)}{dx^2} + n(n+1)V_n^*(x) = 0, \tag{1-12}$$

т. е. полиномы $V_n^*(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1-12). Они могут быть непосредственно выражены через смещенные полиномы Лежандра.

Известно следующее рекуррентное соотношение для обыкновенных полиномов Лежандра [2]:

$$\frac{dP_{n+1}(z)}{dz} - \frac{dP_{n-1}(z)}{dz} = (2n+1)P_n(z).$$

Сделав замену $z=1-2x$, получим аналогичное тождество для смещенных полиномов

$$-\frac{dP^*_{n-1}(x)}{dx}+\frac{dP^*_{n-1}(x)}{dx}=2(2n+1)P_n^*(x). \qquad (1\text{-}13)$$

Если теперь проинтегрировать (1-13) в пределах от нуля до x и учесть (1-6), то будем иметь

$$2(2n+1)V_n^*(x)=P^*_{n-1}(x)-P^*_{n+1}(x) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \qquad (1\text{-}14)$$

т. е. полиномы $V_n^*(x)$ представляются в виде разности двух смежных полиномов Лежандра. Последние образуют полную систему в пространстве $L^2(0,\ 1)$, следовательно, и система полиномов $V_n^*(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ полна в том же пространстве. Более того, покажем, что она является еще и ортогональной с весом $\frac{1}{x(1-x)}$

Будем исходить из ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_0^1 P_n^*(x)P_m^*(x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{1}{2n+1} & n=m\end{cases} \qquad (1\text{-}15)$$

Имеем, учитывая (1-5) и (1-11),

$$\int_0^1 P^*_n(x)P_m^*(x)dx=\int_0^1 P_n^*(x)\frac{dV_m^*(x)}{dx}dx=-$$

$$-\int_0^1 V_m^*(x)\frac{dP_n^*(x)}{dx}dx=n(n+1)\int_0^1\frac{V_n^*(x)V_m^*(x)}{x(1-x)}dx.$$

Таким образом,

$$\int_0^1\frac{V_n^*(x)V^*_m(x)}{x(1-x)}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} & m=n\end{cases} \qquad (1\text{-}16)$$

что и доказывает наше утверждение.

Из (1-5) следует, что экстремумы полинома $V_n^*(x)$ располагаются в нулях полинома $P_n^*(x)$. В частности, полиномы $V_n^*(x)$ с нечетными индексами достигают экстремума в средине интервала $(x=\frac{1}{2})$, что непосредственно видно из представления (1-4), если иметь в виду, что двучлен $x^n(1-x)^n$ имеет максимум при $x=\frac{1}{2}$. Этот максимум является наибольшим по абсолютной величине. Что касается полиномов $V_n^*(x)$ с четными индексами, то при $x=\frac{1}{2}$ они обращаются в нуль, а их экстремумы располагаются симметрично относительно прямой $x=\frac{1}{2}$

Найдем для полиномов $V_n^*(x)$ с нечетными индексами наибольший по абсолютной величине экстремум, соответствующий $x=\frac{1}{2}$ Заменим в (1-14) n на $2n-1$, в результате получим

$$2(4n-1)V^*_{2n-1}(x)=P^*_{2(n-1)}(x)-P_{2n}^*(x).$$

Если теперь иметь в виду, что [2]

$$P_{2}^{*}{}_{(n-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$P_{2n}^{*}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n}n!},$$

то можем написать

$$2(4n-1)V^{*}_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\left(1+\frac{2n-1}{2n}\right),$$

откуда следует

$$\left|V^{*}_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = |V^{*}_{2n-1}(x)|_{max} = \frac{1}{4n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!} =$$

$$= \frac{(2n-3)!!}{2^{n+1}n!}.$$

Последнее выражение можно записать иначе, а именно:

$$\frac{(2n-3)!!}{2^{n+1}n!} = \frac{\Gamma(2n-1)}{2^{n-1}(n-1)!2^{n+1}n!} = \frac{\Gamma(2n-1)}{2^{2n}n[\Gamma(n)]^{2}},$$

где $\Gamma(n)$ есть Гамма-функция.

Таким образом, имеем оценку

$$|V^{*}_{2n-1}(x)| \leqslant \frac{\Gamma(2n-1)}{2^{2n}n[\Gamma(n)]^{2}}.$$

При любых $n>1$ правая часть неравенства есть непрерывная функция. Заменим n на $\frac{n+1}{2}$, тогда будем иметь для любого n

$$|V^{*}_{n}(x)| \leqslant \frac{\Gamma(n)}{2^{n}(n+1)\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{2}} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{2^{n}(n+1)\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{2}}. \qquad (1\text{-}17)$$

Мы можем теперь ввести масштабный множитель и рассматривать полиномы

$$\overline{V}_{n}^{*}(x) = \frac{2^{n}(n+1)\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{2}}{(n-1)!}V^{*}_{n}(x), \qquad (1\text{-}18)$$

для которых, очевидно, оценка имеет вид

$$/\overline{V}_{n}^{*}(x)/\leqslant 1.$$

Для нескольких первых значений n (1-18) дает

$$\overline{V}_{1}^{*}(x) = 4V_{1}^{*}(x);\ \overline{V}_{2}^{*}(x) = 3\pi V_{2}^{*}(x);\ \overline{V}_{3}^{*}(x) = 16V_{3}^{*}(x);$$

$$\overline{V}_{4}^{*}(x) = \frac{15}{2}\pi V_{4}^{*}(x);\ \overline{V}_{5}^{*}(x) = 32V_{5}^{*}(x).$$

Рассмотрим вопрос о разложении произвольной функции в ряд по полиномам $V_{n}^{*}(x)$.

2. Разложение функций в ряды по полиномам $V_n^*(x)$

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция, заданная на интервале $(0, 1)$ и обращающаяся в нуль на концах интервала. Предположим, что имеет место разложение

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_n^*(x). \tag{2-1}$$

Поступая формально, умножим обе части (2-1) на $\frac{V^*_m(x)}{x(1-\ )}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 1.

Учитывая (1-16), будем иметь

$$C_n = n(n+1)(2n+1)\int_0^1 \frac{\varphi(x)V_n^*(x)}{x(1-x)}\,dx \tag{2-2}$$

или, принимая во внимание (1-11) и интегрируя по частям,

$$C_n = -(2n+1)\int_0^1 \varphi(x)\frac{dP_n^*(x)}{dx}\,dx = (2n+1)\int_0^1 \varphi'(x)P_n^*(x)dx. \tag{2-3}$$

Если теперь учесть, что

$$\frac{dP_n^*(x)}{dx} = -n(n+1)F(-n+1, n+2; 2; x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} -1)^k \frac{(n+k+1)!x^k}{(n-k-1)!(k+1)!k!}, \tag{2-4}$$

то можем написать

$$C_n = (2n+1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(n+k+1)!}{(n-k-1)!(k+1)!k!}\int_0^1 x^k\varphi(x)dx. \tag{2-5}$$

Величина

$$M_k = \int_0^1 x^k\varphi(x)dx. \tag{2-6}$$

есть, очевидно, момент К-го порядка функции $\varphi(x)$. Формула (2-5) получает следующий вид:

$$C_n = (2n+1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(n+k+1)!\ M_k}{(n-k-1)!(k+1)!k!}. \tag{2-7}$$

Откуда, в частности, легко найдем:

$$C_1 = 6\,M_0,$$
$$C_2 = 30\,(M_0 - 2\,M_1),$$
$$C_3 = 84\,(M_0 - 5\,M_1 + 5\,M_2),$$
$$C_4 = 180\,(M_0 - 9\,M_1 + 21\,M_2 - 14\,M_3),$$
$$C_5 = 330\,(M_0 - 14\,M_1 + 56\,M_2 - 84\,M_3 + 42\,M_4).$$

— — — — — — — — — —

Выясним условия сходимости разложения (2-1). Если продифференцировать ряд (2-1) и учесть (1-5), то получим разложение производной $\varphi'(x)$ в ряд по смещенным полиномам Лежандра

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^*(x). \tag{2-9}$$

Коэффициенты этого ряда определяются формулой (2-3). Он будет сходиться к $\varphi'(x)$ во всякой внутренней точке интервала (0, 1), являющейся точкой непрерывности, если выполнены следующие условия [2]:

1. $\varphi'(x)$ есть кусочно-непрерывная функция.

2. Интеграл $\int_0^1 [\varphi'(x)]^2 dx$ имеет конечное значение.

Из сходимости ряда (2-9) следует безусловная сходимость разложения (2-1).

Вместо разложения (2-1) практически удобней пользоваться разложением по полиномам $\overline{V}_n^*(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \overline{V}_n^*(x), \tag{2-10}$$

где

$$A_n = \frac{(n-1)!}{2^n(n+1)\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2} C_n. \tag{2-11}$$

Если в (2-10) ограничиться конечным числом членов, то максимальная абсолютная ошибка будет приблизительно равна первому из отброшенных коэффициентов. Заметим, что если функция $f(x)$ не обращается в нуль на концах интервала (0, 1), а принимает конечные значения $f(0)$ и $f(1)$, то разложение получает вид

$$f(x) = f(0)(1-x) + f(1)x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \overline{V}_n^*(x). \tag{2-12}$$

где A_n — коэффициенты разложения для функции

$$\varphi(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x.$$

В качестве примера рассмотрим приближение функции $\varphi(y) = \sin y$ на интервале $(0, 2\pi)$ отрезком ряда (2-10). Подстановкой $y = 2\pi x$ указанный интервал преобразуется в (0, 1). Имеем

$$M_k = \int_0^1 x^k \sin 2\pi x dx$$

Вычисления дают

$$M_0 = 0; \quad M_1 = -\frac{1}{2\pi}; \quad M_2 = -\frac{1}{2\pi}; \quad M_3 = -\frac{1}{2\pi} + \frac{6}{(2\pi)^3};$$

$$M_4 = -\frac{1}{2\pi} + \frac{12}{(2\pi)^3}; \quad M_5 = -\frac{1}{2\pi} + \frac{20}{(2\pi)^3} - \frac{120}{(2\pi)^5}.$$

По формулам (2-7) и (2-11) найдем

$$A_1 = 0; \; A_2 = \frac{10}{\pi^2} \approx 1{,}01321; \; A_3 = 0; \; A_4 = \frac{12}{\pi^4}(2\pi^2 - 21) \approx 0{,}15532$$

$$A_5 = 0; \; A_6 = \frac{208}{5\pi^6}(\pi^4 - 60\pi^2 + 495) \approx 0{,}01007.$$

Если ограничиться всего двумя членами разложения, т. е. считать, что

$$\sin 2\pi x \approx \frac{10}{\pi^2} \overline{V}_2^*(x) + \frac{12}{\pi^4}(2\pi^2 - 21)\overline{V}_3^*(x),$$

то абсолютная максимальная ошибка будет порядка 0,01, причем на концах интервала и в его середине $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ ошибка равна нулю. Добавление еще одного члена уменьшит максимальную абсолютную ошибку на порядок.

В заключение сравним разложение по полиномам $V_n^*(x)$ некоторой функции $\varphi(x)$, определенной на интервале (0, 1), с разложением этой же функции по полиномам Лежандра $P_n^*(x)$. Предположим, что функция $\varphi(x)$ задана своими значениями на концах интервала и несколькими первыми моментами M_k $(k=0, 1, 2, \ldots, \nu)$. Требуется восстановить функцию $\varphi(x)$ по этим данным с наибольшей точностью. Отрезок ряда по полиномам $P_n^*(x)$ будет содержать $\nu+1$ член (начиная с нулевого), причем информация о значениях функции $\varphi(x)$ на концах интервала использована не будет. Разложение по полиномам $\overline{V}_n^*(x)$ будет содержать такое же количество членов (начиная с первого), причем полностью будет использована дополнительная информация о краевых условиях. Последнее обстоятельство и обеспечит значительно более высокую точность аппроксимации функции $\varphi(x)$ отрезком ряда по $\overline{V}_n^*(x)$. Так, в нашем примере, если использовать первые 6 моментов, будем иметь

$$\sin 2\pi x \approx A_2 \overline{V}_2^*(x) + A_4 \overline{V}_4^*(x) + A_6 \overline{V}_6^*(x).$$

Применение полиномов $P_n^*(x)$ дает выражение

$$\sin 2\pi x \approx C_1' P_1^*(x) + C_3' P_3^*(x) + C_5' P_5^*(x),$$

где

$$C_1' = \frac{3}{\pi} \approx 0{,}95493; \quad C_3' = \frac{7}{\pi^3}(\pi^2 - 15) \approx -1{,}15824;$$

$$C_5' = \frac{11}{\pi}\left[1 - \frac{105(\pi^2 - 9)}{\pi^4}\right] \approx 0{,}21929.$$

Абсолютная максимальная ошибка первого из этих приближений на порядок меньше, чем ошибка второго.

Таким образом, интегральные полиномы Лежандра $V_n^*(x)$, в указанном смысле, являются значительно более эффективным средством приближения функций, чем обычные полиномы $P_n^*(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **К. Ланцош.** «Практические методы прикладного анализа», Физматгиз, М., 1961.

2. **Н. Н. Лебедев.** «Специальные функции и их приложения». Физматгиз, М.-Л., 1963.