ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
имени С. М. КИРОВА

Том 194 1972

УЧЕТ ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ В ТОКОВИХРЕВОМ ДАТЧИКЕ ЩЕЛЕВОГО ТИПА

Д. В. МИЛЯЕВ, В. К. ЖУКОВ

(Представлена научно-техническим семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

Бесконтактный контроль геометрических размеров и электропроводности изделий успешно осуществляется методом вихревых токов. Принцип действия приборов, работающих по этому методу, описан в литературе довольно подробно. Нас интересует контроль размеров цилиндрических немагнитных изделий. В таких случаях наряду с проходными датчиками в настоящее время используются токовихревые датчики с кольцевым магнитопроводом [1].

Существующая теория щелевого датчика с кольцевым магнитопроводом не учитывает потери энергии в магнитопроводе, а также явления возникновения вихревых токов в обмотке датчика и явления, связанные с этими потерями энергии. На высоких частотах названные потери могут быть значительные, что, несомненно, приводит к расхождению экспериментальных и теоретических данных.

Определим потери энергии электромагнитного поля в обмотке датчика. Для этого представим обмотку датчика в виде витка бесконечной длины, к концам которого приложено напряжение синусоидальной формы. Переменное магнитное поле, создаваемое протекающим по витку током, индуктирует в обмотке вихревые токи. Напряженность магнитного поля и плотность тока в витке определяются, решая систему уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{rot} \overline{\dot{H}} = \gamma \overline{\dot{E}}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \overline{\dot{E}} = -\mu\mu_0 \frac{d\overline{\dot{H}}}{dt}. \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \overline{\dot{D}} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \overline{\dot{B}} = 0. \tag{4}$$

Совместное решение (1), (2), (3), (4) приводит к волновому уравнению

$$\nabla^2 \overline{\dot{H}} - i\,\omega\gamma\mu\mu_0 \overline{\dot{H}} = 0, \tag{5}$$

в котором γ, μ — удельная электропроводность и магнитная проницаемость материала обмотки датчика (для меди $\mu = 1$). Для решения (5) необходимо воспользоваться цилиндрической системой координат. В цилиндрической системе координат волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2\dot{H}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\dot{H}}{dr}-i\,\omega\gamma\mu_0\dot{H}=0. \tag{6}$$

Интегралом уравнения (6) является функция Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$\dot{H}=\dot{C}_1 J_a(x\sqrt{-i})+\dot{C}_2 N_0(x\sqrt{-i}), \tag{7}$$

где $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ — постоянные интегрирования, $x\sqrt{-i}$ — аргумент фукций, $x=\kappa r$, $\kappa=\sqrt{\omega\gamma\mu_0}$.

Плотность тока $\delta=-\frac{d\dot{H}}{dr}$ в соответствии с (7) равна

$$\delta=\kappa\sqrt{-i}\,[\dot{C}_1^2 J_1(x\sqrt{-i})+\dot{C}_2 N_1(x\sqrt{-i})]. \tag{8}$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий: на наружной поверхности витка напряженность магнитного поля равна нулю, т. е.

$$\dot{C}_1 J_0(x\sqrt{-i})+\dot{C}_2 N_0(x\sqrt{-i})=0, \tag{9}$$

на внутренней поверхности напряженность определяется током в витке

$$\dot{H}=\dot{H}_s=\dot{C}_1 J_0(x\sqrt{-i})+\dot{C}_2 N_0(x\sqrt{-i}). \tag{10}$$

В последних выражениях

$x_1=\kappa r_1$, r_1 — внутренний радиус витка,

$x_2=\kappa r_2$, r_2 — наружный радиус витка, $H_s=Iw$, I — ток в витке.

Из (9) и (10) при их совместном решении находятся $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$. После определения постоянных интегрирования для напряженности магнитного поля и плотности тока найдем

$$\dot{H}=\sqrt{2}I\,\frac{N_0(x_2\sqrt{-i})\,J_0(x\sqrt{-i})-J_0(x_2\sqrt{-i})\,N_0(x\sqrt{-i})}{J_0(x_1\sqrt{-i})\,N_0(x_2\sqrt{-i})-N_0(x_1\sqrt{-i})\,J_0(x_2\sqrt{-i})}. \tag{11}$$

$$\dot{\delta}-\kappa\sqrt{-i}\sqrt{2}I\,\frac{N_0(x_2\sqrt{-i})\,J_0(x\sqrt{-i})-J_0(x_2\sqrt{-i})\,N_0(x\sqrt{-i})}{J_0(x_1\sqrt{-i})\,N_0(x_2\sqrt{-i})-N_0(x_1\sqrt{-i})\,J_0(x_2\sqrt{-i})}. \tag{12}$$

Согласно уравнению электродинамики

$$\dot{U}_{(t)}=\int_s\frac{\dot{\delta}}{\gamma}\,ds+\frac{d}{dt}\int_\sigma\dot{B}\,d\sigma, \tag{13}$$

где s и σ — площадь и сечение витка соответственно. Подставляя в (13) выражения (11) и (12) и беря интеграл, получим

$$\dot{U}_{(t)}=\sqrt{2}\,i\omega\mu_0\pi r_1^2 I+\frac{2\sqrt{2}\pi\sqrt{-i}\,x_1 I}{\gamma}\,\frac{N_0(x_2\sqrt{-i})\,J_1(x_1\sqrt{-i})-}{J_0(x_1\sqrt{-i})\,N_0(x_2\sqrt{-i})-}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{-J_0(x_2\sqrt{-i})\,N_1(x_1\sqrt{-i})}{-N_0(x_1\sqrt{-i})\,J_0(x_2\sqrt{-i})}. \tag{14}$$

С другой стороны,

$$\dot{U}_{(t)}=I\,Z_{\text{об}} \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), находим выражение для полного сопротивления обмотки датчика

$$Z_{об} = i\,\omega\mu_0\,\pi r_1^2 \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}\,\pi\sqrt{-i}\;x_1}{\gamma} \times$$

$$\times \frac{N_0(x_2\sqrt{-i})\,J_1(x_1\sqrt{-i}) - J_0(x_2\sqrt{-i})\,N_1(x_1\sqrt{-i})}{J_0(x_1\sqrt{-i})\,N_0(x_2\sqrt{-i}) - N_0(x_1\sqrt{-i})\,J_0(x_2\sqrt{-i})}. \qquad (15)$$

Определим далее потери энергии в ферритовом магнитопроводе. В общем случае потери энергии складываются из потерь на гистерезис и вихревые токи. Потери на перемагничивание, т. е. потери на гистерезис, могут быть учтены введением комплексной абсолютной магнитной проницаемости:

$$\dot{\mu}_c = \frac{\dot{B}_m}{\dot{H}_m} = \mu_c\,e^{-i\delta}. \qquad (17)$$

Волновое уравнение для ферромагнитной среды в случае цилиндрической волны с учетом (17) получает вид

$$\frac{d^2\dot{H}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\dot{H}}{dr} - i\,\omega\gamma_c\,\dot{\mu}_c\dot{H} = 0, \qquad (18)$$

где γ_c — электропроводность ферромагнетика.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} -i\,\omega\gamma_c\,\dot{\mu}_c = \kappa^2, \\ |\kappa| = \sqrt{\omega\gamma_c|\mu_c|} = M, \\ \Theta = \frac{1}{2}\,\delta + \frac{\pi}{4}, \end{gathered} \qquad (19)$$

с учетом которых волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2\dot{H}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dr\,\dot{H}}{dr} + (M\,e^{-i\Theta})^2\,\dot{H} = 0. \qquad (20)$$

Общим решением этого уравнения являются функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$\dot{H} = \dot{C}_1\,J_0(\kappa r) + BN_0(\kappa r). \qquad (21)$$

Из граничных условий следует, что $H = 0$ при $r = 0$ и $H = H_0$ при $r = a$, поэтому $\dot{B} = 0$

$$\dot{C} = \frac{\dot{H}_0}{J_0(\kappa a)}. \qquad (22)$$

Распределение напряженности магнитного поля по радиусу

$$\dot{\bar{H}} = \bar{1}_z\,\dot{H}_0\,\frac{J_0(M\,e^{-i\Theta}\cdot r)}{J_0(M\,e^{-i\Theta}\,a)}. \qquad (23)$$

Согласно первому уравнению Максвелла

$$\dot{\bar{E}} = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{rot}\,\dot{\bar{H}} \qquad (24)$$

или с учетом (24)

$$\dot{\bar{E}} = -\bar{1}_\varphi\,\frac{1}{\gamma_c}\,\dot{H}_0\,M\,e^{-i\Theta}\,\frac{J_1(M\,e^{-i\Theta}\,r)}{J_0(M\,e^{-i\Theta}\,a)}. \qquad (25)$$

Потери в сердечнике определяются потоком электромагнитной волны, который проникает через боковую поверхность. Поток электромагнитной энергии или вектор Умова—Пойнтинга, средний за период в случае синусоидального изменения во времени составляющих электромагнитного поля, определяется векторным произведением

$$\dot{\bar{\Pi}} = \frac{1}{2}[\dot{\bar{E}}\dot{\bar{H}}^*], \tag{26}$$

в котором $\dot{H}^*$ — сопряженный комплекс напряженности магнитного поля.

Мощность, поглощаемая ферритовым сердечником, определяется полным потоком электромагнитной энергии через боковую поверхность, т. е.

$$\dot{P}_{ф.с} = \int\limits_s \dot{\bar{\Pi}}\, d\dot{\bar{s}}. \tag{27}$$

Для инженерных расчетов удобно ввести выражение мощности, выделяющейся в сердечнике на единице его длины

$$\dot{\bar{\Pi}} = -\bar{1}_r \frac{1}{2} \frac{\dot{H}_0^2}{\gamma_c} M e^{-i\Theta} \frac{J_1(M e^{-i\Theta} r) J_0(M e^{i\Theta} r)}{J_0(M e^{+i\Theta} a) J_0)M e^{-i\Theta} a)}. \tag{28}$$

Знак минус в общем выражении потока указывает на движение волны от большего радиуса к меньшему. Поскольку знак нас не интересует, его можно опустить

$$\dot{P}_{ф.с} = \frac{\dot{H}_0^2}{\gamma_c} \pi a M e^{-i\Theta} \frac{J_1(M e^{-i\Theta} a)}{J_0(M e^{-i\Theta} a)}. \tag{29}$$

Часть энергии, подводимой к датчику, расходуется в ферритовом сердечнике, т. е.

$$\dot{P}_{ф.с} = I^2 \dot{Z}_{ф.с}. \tag{30}$$

Из равенства правых частей выражений (29) и (30) следует

$$\dot{Z}_{ф.с} = \frac{2 w_{10}^2 \pi a}{\gamma_c} M e^{-i\Theta} \frac{J_1(M e^{-i\Theta} a)}{J_0(M e^{-i\Theta} a)}. \tag{31}$$

где w_{10} — число витков на единице длины датчика, а $Z_{ф.с}$ — сопротивление сердечника на единицу длины.

Полученное выражение учитывает все потери, имеющие место в сердечнике, поэтому оно может быть использовано для проведения детального анализа процессов, происходящих в токовихревом датчике щелевого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Жуков, В. Э. Дрейзин, И. Г. Лещенко. Индукционно-импедансный датчик с кольцевым магнитопроводом «Дефектоскопия», № 2, 1966.