

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. П. ЗИБАЛОВ, М. С. РОЙТМАН

(Представлена научным семинаром кафедры радиотехники)

Получение синусоидальных колебаний с малым содержанием гармоник и стабильной амплитудой является в настоящее время весьма актуальной задачей. Для ее решения в автогенераторы вводят в большинстве случаев инерционный нелинейный элемент (ИНЭ) (маломощную лампу накаливания или терморезистор). Такой элемент является почти линейным для мгновенных значений переменного тока при условии, что его постоянная времени много больше постоянной времени колебательного контура генератора. В то же время ИНЭ является нелинейным элементом для действующих значений тока и выполняет роль ограничителя амплитуды колебаний. Это позволяет использовать наиболее линейный участок характеристик активных элементов. Последнее обеспечивает малое содержание гармоник в генерируемых колебаниях.

При практической реализации  $LC$ ,  $RC$  и  $RL$  — автогенераторов с ИНЭ как в ламповом, так и в транзисторном вариантах возможно появление автомодуляции амплитуды колебаний. Выяснению причин этого нежелательного явления посвящено несколько работ [1—3]. Выводы авторов указанных работ сводятся к следующему:

а) в случае линейности характеристик активных элементов такие автогенераторы должны быть абсолютно устойчивы;

б) автомодуляция (неустойчивость по огибающей выходного сигнала) возникает как следствие возрастания, хотя бы на некотором участке, крутизны активного элемента от амплитуды колебаний.

В настоящей работе приводится анализ устойчивости колебаний в автогенераторах с ИНЭ и уточняются границы неустойчивых режимов.

### Математическая модель инерционного нелинейного элемента

При исследовании устойчивости колебаний и переходных процессов в автогенераторах необходимо иметь математическое описание ИНЭ, которое бы связывало сопротивление такого элемента с протекающим через него током. В качестве такой математической модели, пригодной для больших сигналов, предлагается уравнение следующего вида:

$$\tau_n(Z) \frac{dZ}{dt} + Z = R_n(I_n), \quad (1)$$

где  $Z$  — динамическое сопротивление ИНЭ;  
 $I_n$  — ток, протекающий через ИНЭ;

$\tau_d(Z)$  — функция, выражающая зависимость постоянной времени ИНЭ от величины динамического сопротивления;

$R_d(I_d)$  — статическая ом-амперная характеристика ИНЭ.

Указанные функции определяются экспериментально. Зависимость  $\tau_d(Z)$  определяется по переходным или частотным характеристикам, снятым при малых возмущениях тока  $I_d$ . При этом следует заметить, что  $I_d$  и  $R_d$  — взаимозависимые величины. Это позволяет сделать различные пересчеты. Для проверки предлагаемой математической модели ИНЭ были проведены расчеты по уравнению (1) переходных процессов при больших изменениях входной величины  $I_d$ . Экспериментальные и расчетные кривые изменения динамического сопротивления во времени  $Z(t)$  приведены на рис. 1. Расчетные и экспериментальные кривые отличаются не более чем на 10%. Последние можно отнести в основном на погрешности аппаратуры, использованной для снятия переходных процессов. Как видно из рис. 1, качественная картина переходных процессов отражается достаточно хорошо. Этому способствовало введение в уравнение (1) указанных нелинейных зависимостей, определяемых экспериментально.

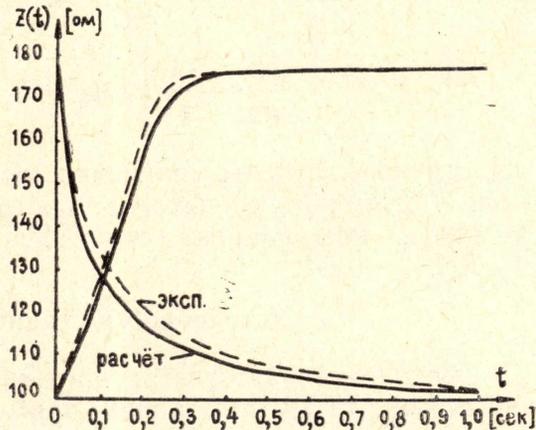


Рис. 1. Переходные процессы в ИНЭ (лампа накаливания НСМ6×20). Верхние кривые при изменении тока от 4 до 8 ма, нижние — от 8 до 4 ма

### Уравнения автогенератора с инерционной нелинейностью

В табл. 1 приведены блок-схемы исследованных автогенераторов различных типов. Так называемые «укороченные» уравнения, описывающие поведение системы по отгибающей выходного сигнала, получены по известной методике [4]. В качестве примера составим уравнение LC-генератора с контуром в анодной цепи, выполненного по блок-схеме 1. Дифференциальное уравнение такого генератора для выходного напряжения имеет следующий вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left( r_{\text{э}} - \frac{S\kappa_{\text{о.с}} R}{L(R+Z)} \right) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (2)$$

где  $r_{\text{э}}$  — эквивалентное сопротивление потерь контура;

$\kappa_{\text{о.с}}$  — коэффициент обратной связи;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — несущая частота колебаний генератора;

$S$  — крутизна лампы (пока считаем  $S = \text{const}$ ).

Остальные обозначения ясны из схем табл. 1.

Полагаем решение уравнения (2) в следующей форме:

$$u = U(t) \text{Cos } \omega_0 t, \quad (3)$$

где  $U(t)$  — медленно меняющаяся во времени функция.

Подставим выражение (3) в уравнение (2), предварительно найдя

$$\frac{du}{dt} \text{ и } \frac{d^2u}{dt^2}.$$

После осуществления всех преобразований, требуемых методом медленно меняющихся амплитуд, уравнение (2) может быть представлено в виде:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_{\text{э}}}{L} - \frac{S \kappa_{\text{o.c}} \frac{R}{R+Z}}{C} \right) U = 0. \quad (4)$$

Учитывая, что  $\frac{2L}{r_{\text{э}}} = \tau_{\text{к}}$  и  $\frac{L}{r_{\text{э}}C} = R_{\text{o.e}}$  перепишем (4) в следующем виде:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\tau_{\text{к}}} \left[ S R_{\text{o.e}} \kappa_{\text{o.c}} \frac{R}{R+Z} - 1 \right] U. \quad (5)$$

Аналогично получены уравнения по огибающей и для других схем табл. 1. Для автогенераторов, построенных по блок-схеме 3, через  $Q$  обозначен коэффициент затухания избирательной цепочки типа  $RL$  или  $RC$ .

### Устойчивость стационарных режимов

Поскольку в автогенераторах интересуются только стационарными решениями, то на выбранном примере  $LC$ -генератора рассмотрим наличие и устойчивость стационарных режимов. Последние определяются как корни системы уравнений

$$\frac{dU}{dt} = 0, \quad \frac{dZ}{dt} = 0,$$

в которой имеется две пары корней (при монотонности  $S(U)$ ). Первая пара корней будет

$$U_n = 0, \quad Z_n = R_{\text{л.о.}}$$

Вторую пару корней можно получить, решив систему уравнений

$$\begin{cases} S(U) R_{\text{o.e}} \cdot \kappa_{\text{o.c}} \frac{R}{R+Z} - 1 = 0; \\ R_{\text{л}}(I_{\text{л}}) - Z = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$I_{\text{л}} = \frac{U}{R+Z}. \quad (8)$$

Уравнение (6) — нелинейное и решается легко графически. Такие расчеты при заданных значениях параметров приведены на рис. 2. По найденному  $U_n = U^0$  находим  $Z_n = R_{\text{л}}^0$ , используя уравнения (7) и (8).

Теперь исследуем устойчивость возможных стационарных режимов. Правые части уравнений по огибающей разложим в ряд Тейлора и удержим члены с отклонениями в первой степени. Получим систему уравнений в отклонениях

$$\begin{cases} \frac{d\Delta U}{dt} = \frac{1}{\tau_{\text{к}}} \left\{ \left[ S(U_n) + U_n \frac{\partial S}{\partial U} \right] R_{\text{o.e}} \cdot \kappa_{\text{o.c}} \frac{R}{Z_n + R} - 1 \right\} \Delta U - \\ - \frac{1}{\tau_{\text{к}}} \frac{S(U_n) R_{\text{o.e}} \cdot \kappa_{\text{o.c}} \cdot R U_n}{(Z_n + R)^2} \Delta Z; \\ \frac{d\Delta Z}{dt} = \frac{1}{\tau_{\text{л}}(Z_n)} \cdot \frac{1}{R + Z_n} \cdot \frac{\partial R_{\text{л}}}{\partial I_{\text{л}}} \Delta U - \frac{1}{\tau_{\text{л}}(Z_n)} \left[ 1 + \frac{U_n}{(Z_n + R)^2} \frac{\partial R_{\text{л}}}{\partial I_{\text{л}}} \right] \Delta Z. \end{cases} \quad (9)$$

Для первого стационарного режима ( $U_n = 0, Z_n = R_{л.о}$ ) система в отклонениях будет

$$\begin{cases} \frac{d\Delta U}{dt} = \frac{1}{\tau_k} \left[ S(0) \cdot R_{о.е} \cdot \kappa_{о.с} \frac{R}{R_{л.о} + R} - 1 \right] \Delta U; \\ \frac{d\Delta Z}{dt} = \frac{1}{\tau_{л}(R_{л.о})} \cdot \frac{1}{R_{л.о} + R} \cdot \frac{\partial R_{л}}{\partial I_{л}} \cdot \Delta U - \frac{1}{\tau_{л}(R_{л.о})} \Delta Z. \end{cases}$$

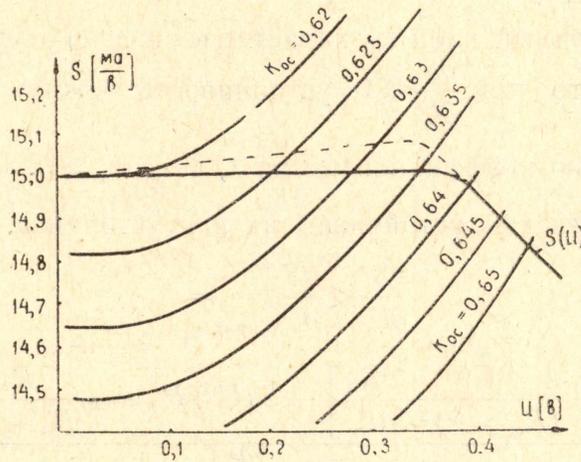


Рис. 2

Характеристический определитель системы этого режима

$$\begin{aligned} D(\lambda) &\equiv \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\tau_k} \left[ S(0) \cdot R_{о.е} \cdot \kappa_{о.с} \frac{R}{R_{л.о} + R} - 1 \right] & 0 \\ -\frac{1}{\tau_{л}(R_{л.о})} \cdot \frac{R}{R_{л.о} + R} \cdot \frac{\partial R_{л}}{\partial I_{л}} & \lambda + \frac{1}{\tau_{л}(R_{л.о})} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 + \left\{ \frac{1}{\tau_{л}(R_{л.о})} - \frac{1}{\tau_k} \left[ S(0) \cdot R_{о.е} \cdot \kappa_{о.с} \frac{R}{R_{л.о} + R} - 1 \right] \right\} \lambda - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_k \tau_{л}(R_{л.о})} \left[ S(0) \cdot R_{о.е} \cdot \kappa_{о.с} \frac{R}{R_{л.о} + R} - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Если выполняется условие возбуждения генератора

$$\kappa_{о.с} > \frac{1}{S(0) R_{о.е}} \cdot \frac{R_{л.о} + R}{R},$$

то этот режим будет неустойчив. Для второго стационарного режима ( $U_n = U^0, Z_n = R_{л}^0$ ) характеристическое уравнение системы будет

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\tau_{л}(R_{л}^0)} \left[ 1 + \frac{U^0}{(R_{л}^0 + R)^2} \frac{\partial R_{л}}{\partial I_{л}} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_k} \left\{ \left[ S(U^0) + U^0 \frac{\partial S}{\partial U} \right] R_{о.е} \cdot \kappa_{о.с} \frac{R}{R_{л}^0 + R} - 1 \right\}; \end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{1}{\tau_k \tau_L (R_L^0)} \cdot \frac{S(U^0) R_{o.e.} \kappa_{o.c} R U^0}{(R_L^0 + R)^3} \frac{\partial R_L}{\partial I_L} -$$

$$- \frac{1}{\tau_k \tau_L (R_L^0)} \left[ 1 + \frac{U^0}{(R_L^0 + R)^2} \frac{\partial R_L}{\partial I_L} \right] \times$$

$$\times \left\{ \left[ S(U^0) + U^0 \frac{\partial S}{\partial U} \right] R_{o.e.} \kappa_{o.c} \frac{R}{R_L^0 + R} - 1 \right\}.$$

Поскольку свободный член  $a_2$  характеристического уравнения всегда положителен<sup>1)</sup>, то при  $\frac{\partial S}{\partial U} \leq 0$  устойчивость режима обеспечивается положительностью коэффициента при  $\lambda$ , т. е.  $a_1 > 0$ . При  $\frac{\partial S}{\partial U} > 0$  система может быть как устойчива, так и неустойчива. В случае, если

$$\frac{\partial S}{\partial U} < \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{\text{крит}} =$$

$$= \frac{\frac{\tau_k}{\tau_L (R_L^0)} \left[ 1 + \frac{U^0}{(R_L^0 + R)^2} \frac{\partial R_L}{\partial I_L} \right] - S(U^0) R_{o.e.} \kappa_{o.c} \frac{R}{R_L^0 + R} + 1}{U^0 R_{o.e.} \kappa_{o.c} \frac{R}{R_L^0 + R}}, \quad (11)$$

то автогенератор будет устойчив по огибающей, в противном случае — неустойчив.

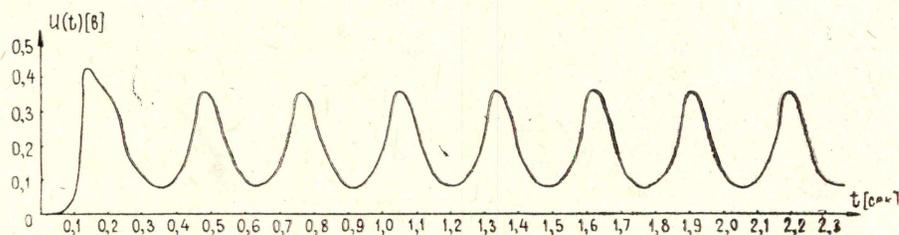
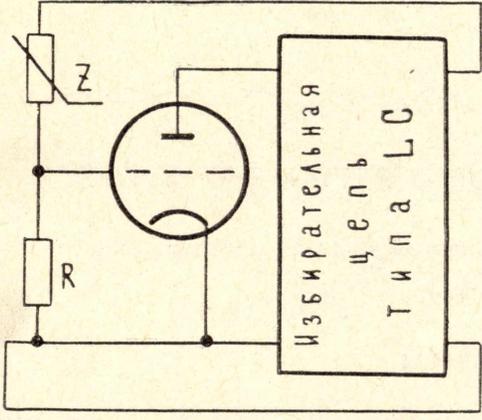
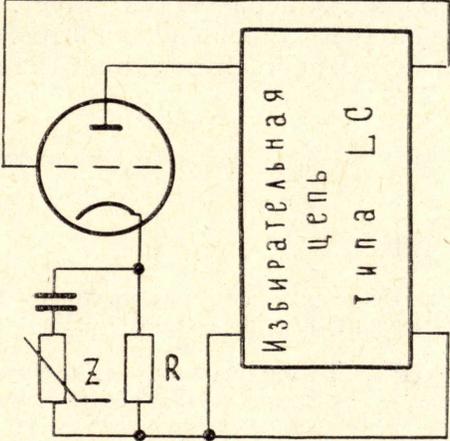
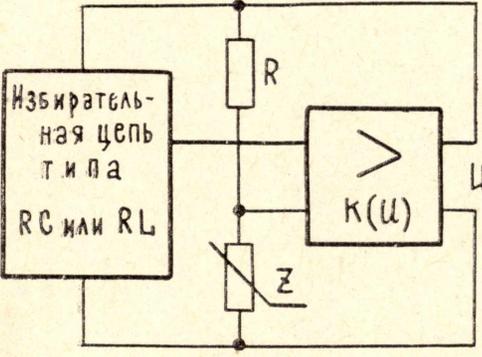


Рис. 3. Переходный процесс в автогенераторе 1 по огибающей выходного напряжения при  $\frac{dS}{dU} > \frac{dS}{dU} \Big|_{\text{крит}}$

Анализ проводился также численными методами. Исходная нелинейная система уравнений по огибающей интегрировалась по методу Рунге-Кутты на ЭЦВМ БЭСМ-4 с различными функциями  $S(U)$ . На рабочем участке характеристики  $S(U)$  варьировался наклон (задавались различные  $\frac{\partial S}{\partial U} > 0$ ). Результаты решения для автогенератора 1 приведены на рис. 3 и 4. На рис. 3 хорошо видна автомодуляция колебаний выходного напряжения, это решение получено при  $\frac{\partial S}{\partial U} > \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{\text{крит}}$ . Из рис. 4 видно, что переходный процесс затухает, мо-

<sup>1)</sup> Предполагается, что ИНЭ имеет положительный температурный коэффициент сопротивления. Например, для лампы накаливания с металлической нитью  $\frac{\partial R_L}{\partial I_L} > 0$ .

Таблица 1

№	Блок-схема автогенератора	Система уравнений по огибающей
1		$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{T_K} \left[ S(U) R_{oe} K_{oc} \frac{R}{R+Z} - 1 \right] U;$ $\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{T_A(Z)} \left[ R_A(I_A) - Z \right];$ <p style="text-align: center;">где <math>I_A = \frac{U}{R+Z}</math></p>
2		$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{T_K} \left[ \frac{S(I) R_{oe} K_{oc}}{1+S(I) R_3} - 1 \right] I,$ $\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{T_A(Z)} \left[ R_A(I_A) - Z \right],$ <p style="text-align: center;">где <math>I_A = \frac{R}{R+Z} I, R_3 = \frac{R Z}{R+Z}</math></p>
3		$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2T} \left[ \frac{K(U)(R+Z)}{R+Z+ZK(U)} - Q \right] U,$ $\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{T_A(Z)} \left[ R_A(I_A) - Z \right],$ <p style="text-align: center;">где <math>I_A = \frac{U}{R+Z}</math></p>

дуляция исчезает, это решение получено при  $\frac{\partial S}{\partial U} < \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{\text{крит}}$ , но при  $\frac{\partial S}{\partial U} > 0$ . Аналогичные результаты получены при экспериментальной проверке полученных условий на макетах автогенераторов, построенных по приведенным блок-схемам. Расчеты и проведенный эксперимент полностью подтвердили теоретический анализ.

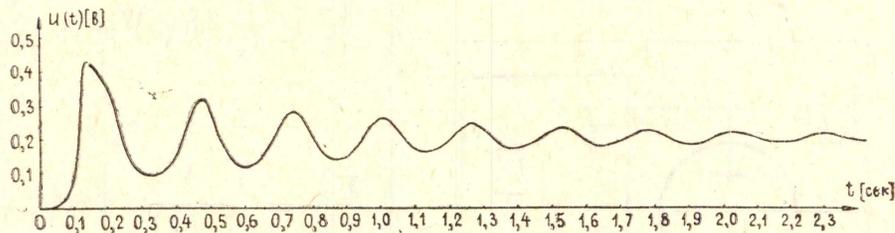


Рис. 4. Переходный процесс в автогенераторе 1 по огибающей выходного напряжения при  $\frac{dS}{dU} < \frac{dS}{dU} \Big|_{\text{крит}}$

### Выводы

1. Линейная характеристика активного элемента ( $S = \text{const}$ ) не является границей устойчивых режимов работы автогенераторов с ИНЭ.
2. Вполне допустим подъем характеристик активного элемента на рабочем участке до тех пор, пока выполняется неравенство (11)<sup>2</sup>.
3. Запас устойчивости по амплитуде (при линейной характеристике  $S = \text{const}$ ) определяется в основном крутизной *ом*-амперной характеристики ИНЭ.

<sup>2</sup>) Аналогичные неравенства, определяющие условия появления автомодуляции, получены и для автогенераторов 2 и 3.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Федоров. О некоторых паразитных процессах в генераторах колебаний с «инерционной нелинейностью» в колебательном контуре. — «Радиотехника», т. 9, 1954, № 6.
2. А. А. Львович. Переходные процессы и автомодуляция в амплитудно-стабильных генераторах с термосопротивлениями. — «Электросвязь», 1959, № 5.
3. В. Н. Ласкавый. О неустойчивости по амплитуде генераторов с инерционной нелинейностью. — «Приборы и системы управления», 1969, № 6.
4. И. С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. М., «Советское радио», 1964.