ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 202 1973

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ УОЛША В СИСТЕМАХ РАСПОЗНАВАНИЯ

Ю. П. ЗАБАШТА, В. М. РАЗИН

Нередко задачи распознавания могут быть сведены к корреляционным методам, то есть к задаче построения оптимальных фильтров и вычисления вероятности гипотез о принадлежности входной ситуации.

Поскольку класс входных ситуаций обычно велик, возникает необходимость параллельной обработки информации или построения перестраиваемых (программируемых) оптимальных фильтров.

Известно [1], что амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра отличается от амплитудного спектра сигнала, которому оптимален этот фильтр, только множителем, а его фазовая характеристика дополняет фазовый спектр сигнала до линейной функции частоты.

Таким образом, характеристики оптимального фильтра наилучшим образом согласованы со спектральными характеристиками сигнала (в литературе оптимальный фильтр часто называют согласованным фильтром).

Поскольку реальные сигналы допускают представление через систему ортогональных функций, отличных от классической тригонометрической системы, можно допустить, что существует возможность построения фильтров, отличающихся от классических.

Как указывалось [2], описание сигналов и устройств на классическом спектральном языке не соответствует требованиям, предъявляемым современным развитием техники, в частности, интегральными схемами.

С этой точки зрения более удобны методы спектрального анализа (соответственно и синтеза), использующие в качестве базиса систему ортогональных функций Уолша [3].

Функциям Уолша может быть дана частотная интерпретация, если под «частотой» понимать половину числа переходов функции через нуль в единицу времени. Например, для тригонометрической системы колебание частотой 1 *гц* имеет 2 перехода через нуль в секунду.

На рис. 1 представлены первые 16 функций Уолша, расположенные в порядке увеличения их частоты. Для наглядности сравнения с тригонометрической системой функции Уолша расположены на интервале

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{t}{T} = \Theta \leqslant \frac{1}{2}.$$

Нетрудно заметить, что две функции Уолша, имеющие равные частоты, отличаются между собой только фазовым сдвигом. Одна из них —

четная функция относительно $\Theta=0$ (подобно косинусоидальной функции), другая — нечетная (подобно синусоидальной функции).

По аналогии, четные функции Уолша названы $\mathrm{Cal}(\nu, \Theta)$, нечетные — $\mathrm{Sal}(\nu, \Theta)$ [4], где ν — частота функци, Θ — нормализованный аргумент $\Theta=\frac{t}{T}$, T — период функции Уолша. При $\nu=0$

$$\mathrm{Cal}(\nu, \Theta)=\mathrm{Sal}(\nu, \Theta)=\mathrm{Wal}(\nu, \Theta). \quad (1)$$

Электрические свойства фильтра характеризуются его амплитудной и фазовой характеристиками, первая из которых определяет затухание

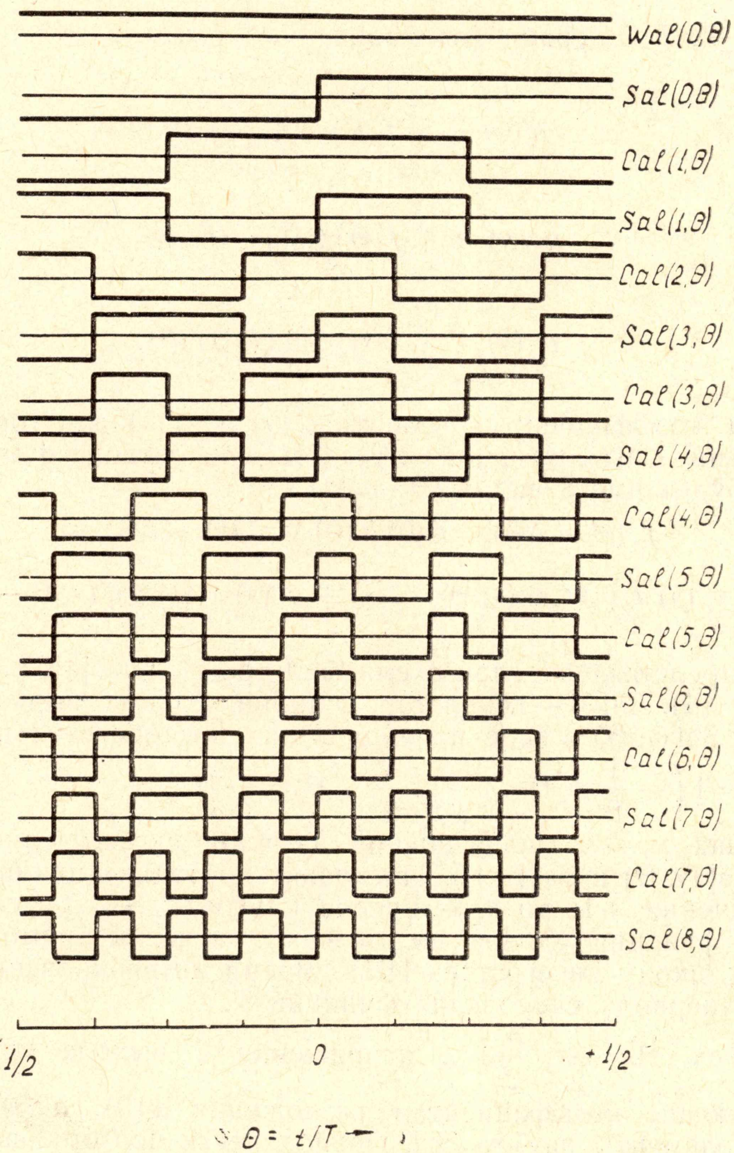

Рис. 1

составляющих сигнала, а вторая — их фазовые сдвиги. Если на вход фильтра действует функция $f(t)$

$$f(t)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left[a_\kappa \cos \kappa\omega t+b_\kappa \sin \kappa\omega t\right], \quad (2)$$

то каждая составляющая сигнала на выходе фильтра будет иметь вид

$$a'_{\kappa} \cos \kappa\omega (t - t_c) \quad \text{и} \quad b'_{\kappa} \sin \kappa\omega (t - t_s).$$

Затухание каждой из составляющих, вносимое фильтром, определится как $\frac{a'_{\kappa}}{a_{\kappa}}$ и $\frac{b'_{\kappa}}{b_{\kappa}}$, а фазовый сдвиг $\varphi_c = - \kappa\omega t_c$ и $\varphi_s = - \kappa\omega t_s$.

Аналогично определяются амплитудная и фазовая характеристики для фильтра Уолша. Представим $f(\Theta)$ в виде ряда [3]

$$f(\Theta) = a_0 \operatorname{Wal}(\Theta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_c(\nu) \operatorname{Cal}(\nu, \Theta) + a_s(\nu) \operatorname{Sal}(\nu, \Theta)],$$

где $\Theta = \frac{t}{T}$, T — период функции,

$$a(0) = \int_{-1/2}^{1/2} f(\Theta) \operatorname{Wal}(\Theta)\, d\Theta,$$

$$a_c(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} f(\Theta) \operatorname{Cal}(\nu, \Theta)\, d\Theta,$$

$$a_s(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} f(\Theta) \operatorname{Sal}(\nu, \Theta)\, d\Theta. \tag{3}$$

Введем коэффициент затухания $\kappa_c(\nu)$ и $\kappa_s(\nu)$ для соответствующих функций $\operatorname{Cal}(\nu, \Theta)$ и $\operatorname{Sal}(\nu, \Theta)$. Тогда на выходе фильтра функция $f(\Theta)$ будет иметь вид $f_\nu(\Theta - \Delta\Theta)$

$$f_\nu(\Theta - \Delta\Theta) = \kappa(0)\, a(0) \operatorname{Wal}(\Theta - \Delta\Theta) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} [\kappa_c(\nu)\, a_c(\nu) \operatorname{Cal}(\nu, \Theta - \Delta\Theta) + \kappa_s(\nu)\, a_s(\nu) \operatorname{Sal}(\nu, \Theta - \Delta\Theta]. \tag{4}$$

На рис. 2 представлена блок-схема фильтра Уолша [4], реализующая выражение (4). ГФУ — генератор функций Уолша выдает функции $\operatorname{Cal}(\nu, \Theta)$ и $\operatorname{Sal}(\nu, \Theta)$ в виде периодических последовательностей с периодом $\Theta = 1 \left(-\frac{1}{2} \leqslant \Theta < \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \leqslant \Theta \leqslant \frac{3}{2}\right)\cdots$

В ключах $\kappa_1 - \kappa_n$ поступивший на вход сигнал умножается на функции $\operatorname{Cal}(\nu, \Theta)$ и $\operatorname{Sal}(\nu, \Theta)$. Поскольку последние принимают только два значения ± 1, то практически ключи $\kappa_1 - \kappa_n$ в соответствии со знаком функции Уолша подключают сигнал к прямому или инверсивному входу интегратора ИНТ. Время интегрирования интегратора равно периоду следования функций Т.

В точках $\Theta = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \ldots$ напряжения с выхода интеграторов, соответствующие коэффициентам разложения $a(0)$, $a_c(\nu)$, $a_s(\nu)$ подаются на элементы памяти ЭП. Периодически повторяющиеся функции $\operatorname{Cal}(\nu, \Theta)$ и $\operatorname{Sal}(\nu, \Theta)$ перемножаются на ключах $\kappa'_1 - \kappa'_n$ со значениями $a_c(\nu)$ и $a_s(\nu)$ на выходе ЭП и с коэффициентом затухания $\kappa_c(\nu)$ и $\kappa_s(\nu)$ подаются на сумматор, на выход которого имеем функцию $f_\nu(\Theta - \Delta\Theta)$.

Изменяя значения соответствующих сопротивлений $R_0 \cdots R_n$, тем самым меняя коэффициент затухания $\kappa_{c,s}(\nu)$ в пределах $\kappa_{c,s} = \infty$ при $r = 0$, и $\kappa_{c,s}(\nu) = 0$ при $r = \infty$, нетрудно получить необходимую передаточную характеристику фильтра. Также нетрудно запрограммировать изменение коэффициентов затухания, т. е. получить программируемый фильтр.

Техническая реализация такого фильтра не вызывает затруднений. Фильтр может быть выполнен как в дискретном, так и в аналоговом вариантах.

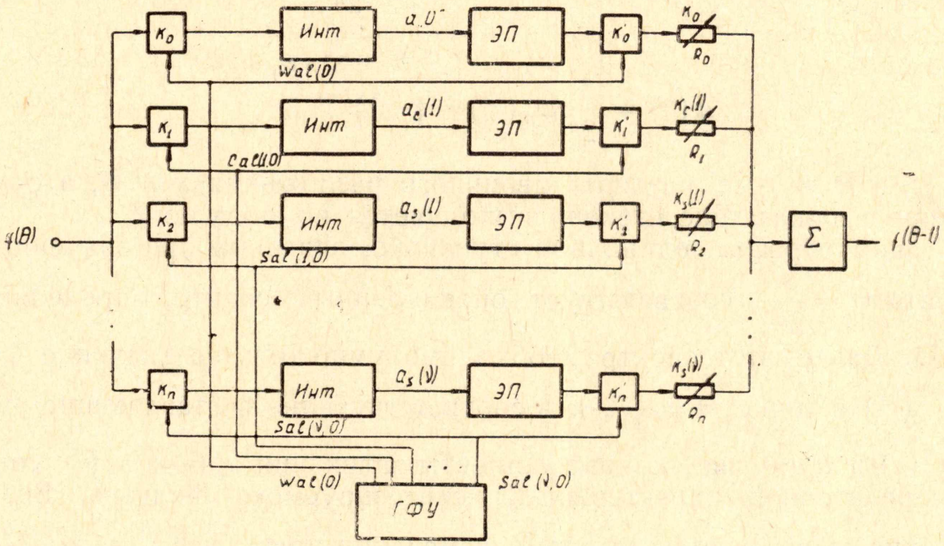

Рис. 2

Временная задержка выходного сигнала $f_\nu(\Theta)$ относительно входного $f(\Theta)$ в таком фильтре составит время, равное периоду T, $(\Delta\Theta = 1)$ В некоторых задачах (особенно в системах распознавания, работающих в реальном масштабе времени) такая задержка недопустима.

Рассмотрим фильтр Уолша, имеющий время задержки сигнала, равное $\Delta\Theta = \frac{1}{2^n}$, где n — порядок функции Уолша. Принцип, положенный в основу работы этого фильтра, следующий.

Исследуемую функцию $f(\Theta)$ аппроксимируем кусочно-постоянной функцией (рис. 3), которая в свою очередь может быть представлена набором ступенек, сосредоточенных на двоичном интервале [3]

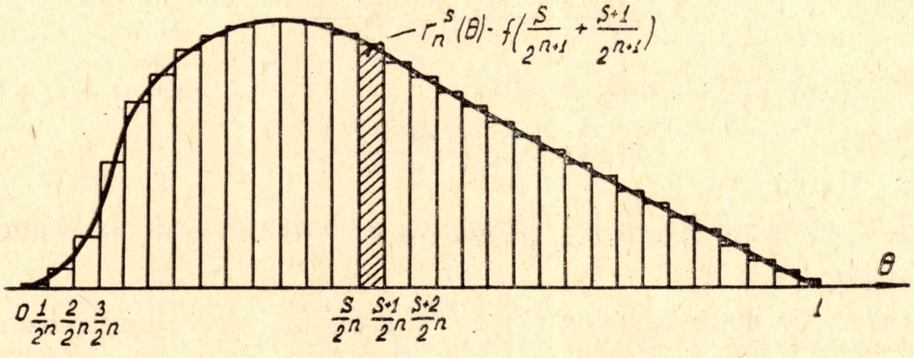

Рис. 3

$$r_n^s(\Theta) = \begin{cases} 1 \text{ если } \dfrac{s}{2^n} \leqslant \Theta < \dfrac{s+1}{2^n} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Амплитуда каждой ступеньки определится как

$$r_n^s(s)\cdot f\left(\frac{2s+1}{2^{n+1}}\right). \tag{6}$$

Спектр единичной ступеньки r_n^s при $\Theta=\frac{s}{2^n}$ определится [3]

$$a(\kappa)=\frac{1}{2^n}w_\kappa(\Theta)=(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n}\kappa_j\Theta_j}, \tag{7}$$

где κ_j и Θ_j — j-ые разряды двоичного разложения κ и Θ, а суммирование в показателе степени выполняется по модулю 2.

Таким образом, единичной ступеньке, заданной при значении аргумента $\Theta=\frac{s}{2^n}$, соответствует определенный спектр, определяемый по (7). Далее этот спектр необходимо умножить на значение функции $f(\Theta)$ в точке $\Theta=\frac{s}{2^n}$, а в соответствующие составляющие епектра $a_c(\nu)$ и $a_s(\nu)$ ввести коэффициенты затухания $\kappa_c(\nu)$ и $\kappa_s(\nu)$ согласно передаточной характеристики синтезируемого фильтра. Все эти операции выполняются за время изменения аргумента $\frac{s}{2^n}\leqslant\Theta\leqslant\frac{s+1}{2^n}$, т. е. за время $\frac{1}{2^n}$. Синтез выходной функции $f_\nu(\Theta-\Delta\Theta)$ может быть начат на следующем интервале $\frac{s+1}{2^n}\leqslant\Theta<\frac{s+2}{2^n}$. Задержка $f_\nu(\Theta-\Delta\Theta)$ относительно $f(\Theta)$ составит $\Delta\Theta=\frac{1}{2^n}$ Блок-схема фильтра представлена на рис. 4. Так как спектр едини чной ступеньки $a_{c,s}(\nu,\Theta)$ определяется через функции Уолша (7), он может быть получен с помощью того же генератора ГФУ. Умножение коэффициентов спектра, каждый из которых принимает значение ±1, на функцию $f(\Theta)$ происходит в множительных устройствах m_0-m, аналогичных ключам $\kappa_0-\kappa_n$ на рис. 2 в момент времени

$$\Theta=\frac{s}{2^{n+1}}+\frac{s^{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2s+1}{2^{n+1}}.$$

Результат умножения, равный

$$a_{c,s}(\nu,\Theta)\cdot f\left(\frac{2s+1}{2^{n+1}}\right),$$

в течение времени $\Delta\Theta'=\frac{1}{2^{n+1}}$ хранится в соответствующих элементах памяти ЭП.

Указанные произведения (8) на ключах $\kappa_0'-\kappa_n'$ перемножаются со значениями функций Уолша $\mathrm{Col}(\nu,\Theta-\Delta\Theta)$, $\mathrm{Sol}(\nu,\Theta-\Delta\Theta)$, задержанными на время $\Delta\Theta=\frac{1}{2^n}$, и с соответствующим коэффициентом затухания $\kappa_s(\nu)$ и $\kappa_c(\nu)$ подаются на сумматор, с выхода которого снимается функция $f_\nu\left(\Theta-\frac{1}{2^n}\right)$.

Подобно фильтру на рис. 2, фильтр может быть выполнен в обоих вариантах (дискретном или аналоговом). Поскольку процесс изменения передаточной характеристики фильтра не вызывает затруднений фильтр может быть выполнен как программируемый или адаптивный, что особенно ценно в системах распознавания.

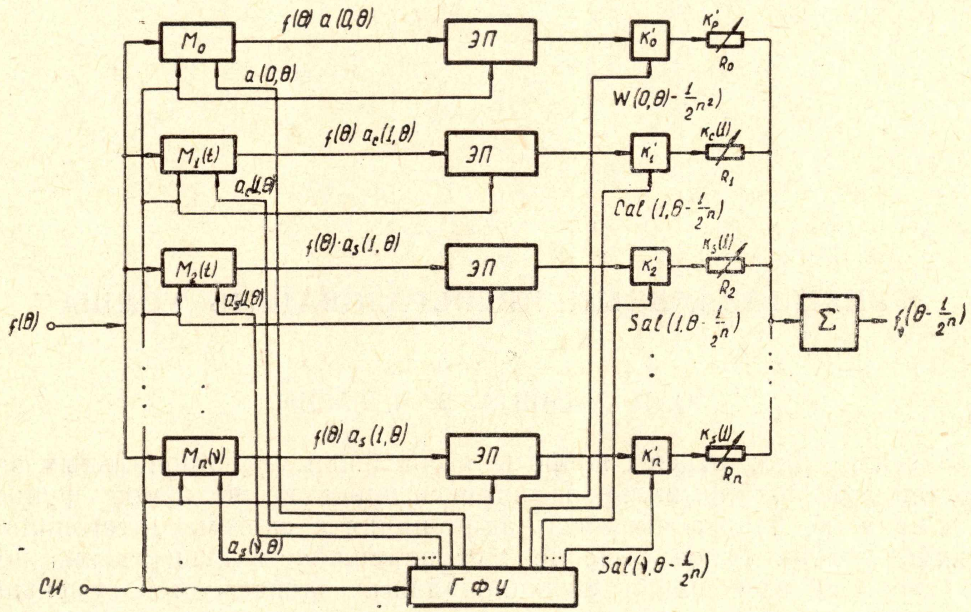

Рис. 4

Кроме этого, несомненно, преимуществом указанных фильтров является простота их синтеза и технической реализации с использованием современных достижений интегральной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Лезин. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М., «Советское радио», 1969.

2. H. F. Harmuth. A generalized concept of frequency and some applications. IEEE Trans. IT-14 May, 1968, pp. 375—382

3. Б. Т. Поляк, Ю. А. Шрейдер. Применение полиномов Уолша в приближенных вычислениях. — Вопросы теории математических машин. Вып. 2, М., «Наука», 1962.

4. H. F. Harmuth. Crundzuqe einer Filtertheorie fur die Männderfunktionen. An (Θ) AEÜ. 18. 1964. 544—554.