ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 203 1974

ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ $\sin x$ и $\cos x$ В РЕЖИМЕ ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ НА ЦВМ «МИНСК-1»

В. К. КИВРАН

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

На цифровых вычислительных машинах с фиксированной запятой вычисления тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ в режиме плавающей запятой обычно проводятся по следующей схеме.

Аргумент представляется в масштабе $1:2\pi$, и дробная часть его в денормализованном виде приводится к интервалу $(-1;\ 1)$ известным преобразованием

$$z=\left(\left|\left|\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{4}\right)4 \qquad (1)$$

для вычисления $\sin x$ и

$$z=\left(\left|\left|\frac{x}{2\pi}\right|-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{4}\right)4 \qquad (2)$$

для вычисления $\cos x$. Целая часть аргумента отбрасывается.

Затем для приведенного аргумента вычисляется интерполяционный полином Чебышева по схеме Горнера

$$(((((c_6z^2+c_5)z^2+c_4)z^2+c_3)z^2+c_2)z^2+c_1)z+z. \qquad (3)$$

Результат нормализуется.

По этой схеме построена стандартная подпрограмма и на ЦВМ «Минск-1».

Эта СП имеет ряд недостатков.

Во-первых, полином Чебышева вычисляется в режиме фиксированной запятой, что приводит при отрицательном порядке аргумента к простому отбрасыванию младших разрядов мантиссы и, следовательно, к увеличению погрешности вычислений.

Во-вторых, ввиду некоторых особенностей операций сдвига на ЦВМ «Минск-1» вычисленное значение функции может оказаться неверным, если порядок аргумента превышает по модулю 31.

И, кроме того, при $x=-0$ вычисленное значение $\sin x$ равно 2^{-29}, а не нулю, что может быть неудобным при решении некоторых типов задач.

В настоящей работе предлагается модернизированная СП функций $\sin x$ и $\cos x$, в которой устранены вышеперечисленные недостатки.

Во-первых, в предложенной СП полином Чебышева для $\sin x$ с отрицательным порядком вычисляется не с денормализованным аргументом, а с использованием всей его мантиссы. Для этого умножение скобок Горнера в выражении (3) производится на квадрат мантиссы аргумента с последующим сдвигом результата на двойной порядок. Вычисления же полинома для $\sin x$ с положительным порядком аргумента и для $\cos x$ проводятся по-прежнему в режиме фиксированной запятой, что в этом случае равносильно плавающей.

Таким образом, погрешность вычисления полинома вместе с приведением аргумента по формулам (1) и (2) за счет приемов программирования по предложенной подпрограмме ограничивается лишь двумя-тремя младшими разрядами, что значительно меньше средней погрешности интерполяции функции полиномом.

Во-вторых, вычисленное значение функции верно для любого порядка аргумента, так как при вычислении $\sin x$ с положительным порядком и $\cos x$ аргумент полагается нулю, если порядок превышает по модулю 31.

В-третьих, в предложенной подпрограмме значение функции $\sin x$ полагается нулю, если аргумент равен нулю или кратный 2π с любым знаком.

В заключение следует отметить, что применение более тщательных приемов программирования значительно повысило точность вычисления $\sin x$, особенно при очень малых аргументах. Точность же вычисления $\cos x$ повысить не удается, так как данный алгоритм вычисления $\cos x$ не позволяет это сделать.

В приложении приведена программа с краткими пояснениями.

Приложение. Программа вычисления $\sin x$ и $\cos x$ с плавающей запятой на ЦВМ «Минск-1».

Порядок аргумента помещается по адресу 0020, мантисса — 0021, значение функции соответственно — 0022 и 0023.

Для вычисления $\sin x$ вход с СП производится по адресу 2000, для вычисления $\cos x$ — 2002.

2000	11	0004	0012	вход для вычисления $\sin x$,
1	24	2003	0023	
2	05	0000	0023	вход для вычисления $\cos x$,
3	03	2050	0021	аргумент в частях круга,
4	16	0023	0020	с 2006 вычисляется $\sin x$ с $p \geqslant 0$
5	54	2006	2017	и $\cos x$, а с 2017 — $\sin x$ с $p < 0$,
6	—17	2033	0020	
7	54	2012	2012	снятие ограничения
2010	05	0000	0021	порядка аргумента,
1	24	2016	0000	
2	—07	0020	0021	денормализация аргумента и
3	54	2016	2015	приведение его к интервалу (0;
4	24	2016	0000	1),
5	20	0001	0021	
6	05	0000	0020	
7	—27	0012	0022	удвоение порядка ($2p_z$),
2020	10	0023	0021	
1	71	0002	0000	вычисление $q_z/2$,
2	71	2057	0000	
3	—27	0012	0021	

4	—27	0012	0024	
5	23	0024	0024	
6	—17	2033	0022	$\sin x = 0$, если $\lvert p_z \rvert > 31$,
7	54	0000	2042	
2030	05	2046	2034	
1	05	2051	0023	вычисление полинома
2	13	0024	0023	с $p_z \leqslant 0$,
3	—37	0022	0005	
4	20	2052	0023	
5	00	0011	2034	
6	—71	2047	0000	
7	54	2032	0000	
2040	13	0021	0023	
1	20	0021	0021	
2	15	0021	0022	
3	10	0020	0022	нормализация результата,
4	20	0012	0022	
5	24	0027	0000	
6	20	2052	0023	псевдокоманды,
7	20	2057	0023	
2050	12	1371	4067	$1/2\pi$,
1	—00	0000	7130	c_6,
2	00	0052	0011	c_5,
3	—00	2313	2060	c_4,
4	05	0632	7370	c_3,
5	—51	2567	4711	c_2,
6	44	4176	6520	c_1,
7	20	0000	0001	$1/4 - 2^{-30}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Библиотека стандартных подпрограмм для ЭЦВМ «Минск-1», часть II, Минск, 1961.