

НЕУСТРАНИМЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ЛОКАЛЬНО СГЛАЖЕННОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

В работе [1] показано, что значение неустраняемой погрешности второго рода при аппроксимации в среднем тригонометрическим полиномом возрастает с увеличением степени полинома, т. е. сходимость приближения в целом нарушается. В настоящей заметке рассматривается один из методов уменьшения влияния неопределенности в значениях узлов на точность и устойчивость приближения, существо которого состоит в локальном сглаживании аппроксимирующего тригонометрического ряда, построенного по экспериментальным данным.

Операция локального сглаживания заключается в замене исходного ряда новым рядом согласно соотношению [2]

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_n(x-\xi) d\xi, \quad (1)$$

где h — интервал усреднения. Иными словами, исходный ряд $T_n(x)$ заменяется новым $\bar{T}_n(x)$, полученным из первого путем усреднения на интервале длиной h с центром в точке x .

Если значение h выбрано из условия

$$h = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad (2)$$

то метод локального сглаживания в применении к тригонометрическим полиномам называется методом σ -множителей [2]. Применяя преобразование (1) к тригонометрическому полиному $T_n(x)$ в его канонической форме, получим

$$\bar{T}_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{hk}{2}}{\frac{hk}{2}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (3)$$

при h , удовлетворяющем (2).

Сохраняя прежней формулировку задачи [1], для неустранимой погрешности второго рода получим выражение

$$\bar{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin^2 \frac{kh}{2}}{\left(\frac{kh}{2}\right)^2} (M[\alpha_k^2] + M[\beta_k^2]) \quad (4)$$

или в окончательном виде

$$\bar{\sigma}_2^2 = \frac{d^2}{\pi^2} (n-1) \sum_{k=1}^{2n} y_k^2. \quad (5)$$

При выводе соотношения (5) использовалось равенство

$$\sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{hk}{2} = \frac{1}{2} (n-1), \quad (6)$$

доказательство которого основано на известной формуле

$$\sum_{m=1}^n e^{ihm} = \frac{1 - e^{ihn}}{1 - e^{ih}}. \quad (7)$$

Считая последовательность отсчетов y_k ($k=0, 1, \dots, 2n$), ограниченной константой M , получим неравенство

$$\bar{\sigma}_2^2 \leq \frac{d^2}{\pi^2} (n-1)(2n+1)M^2. \quad (8)$$

При достаточно больших n неравенство (8) можно упростить

$$\bar{\sigma}_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} d M n. \quad (9)$$

Интересно сопоставить значения неустранимых погрешностей для несглаженного и сглаженного рядов. Отношение погрешностей дает

$$\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+1)(2n+1)}} \quad (10)$$

или при больших n

$$\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} = 1,28... \quad (11)$$

Из последнего соотношения видно, что во втором случае неустраняемая погрешность $\bar{\sigma}_2$ при больших n несколько меньше неустранимой погрешности для несглаженного ряда. Для небольших n , что наиболее часто встречается в практике приближения, уменьшение погрешности более существенно. В частности, при $n=2; 3; 4$ соответствующие значения $\sigma_2/\bar{\sigma}_2$ равны 1,98; 1,68; 1,56. Незначительность выигрыша в уменьшении погрешности для сглаженного ряда при больших n вызвано тем,

что при возрастании n интервал сглаживания $h \rightarrow 0$ и эффект сглаживания сказывается все меньше и меньше. В целом нужно отметить, что сглаживание приближающего ряда с помощью σ -множителей не решает проблемы устойчивости процесса приближения при вариации последовательности узлов в ограниченных пределах.

При большом числе отсчетов, когда h достаточно мало, интервал сглаживания можно взять большим, нежели h . Пусть, например, интервал локального усреднения $\delta = mh$, где m — целое и h определяется согласно (2). Тогда преобразование (1) примет вид

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{mh} \int_{-\frac{h}{2}m}^{\frac{h}{2}m} T_n(x-\xi) d\xi \quad (12)$$

и отношение

$$\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot m, \quad (13)$$

т. е. в m раз оказывается больше первоначального значения. Таким образом, увеличение интервала локального усреднения делает процесс приближения более устойчивым. Однако при этом необходимо, чтобы m оставалось значительно меньшим $N = 2n + 1$, в противном случае искажение аппроксимирующего ряда, вызванное локальным усреднением, будет значительным. Оценку этого искажения можно найти в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. Наац. Приближение в среднем тригонометрическими полиномами по приближенным узлам (настоящий сборник).
2. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз. М., 1961.