ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 203 1974

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС С. Н. БЕРНШТЕЙНА ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ДАННЫМ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

В настоящей работе рассматривается интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна для случая, когда исходные данные являются приближенными, т. е. отсчеты и узлы, в которых они производятся, известны с определенной погрешностью. Наличие указанных погрешностей существенно влияет на качество приближения, как это уже было показано в работе [1].

Интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна строится на основе тригонометрических интерполяционных полиномов согласно выражению (имеется в виду первый процесс С. Н. Бернштейна [2]).

$$U_q^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{T}_{n,0}(x)+\mathrm{T}_{n,1}(x)+\ldots\mathrm{T}_{n,q}(x)}{q+1}, \tag{1}$$

где

$$\mathrm{T}_{n,p}(x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{m=1}^{p}\left(a_m^{(n)}\cos mx+b_m^{(n)}\sin mx\right), \tag{2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(n)}&=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\\ a_m^{(n)}&=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\cos mx_k,\\ b_m^{(n)}&=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\sin mx_k,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

для системы равноотстоящих узлов

$$x_k=\frac{2\pi k}{2n+1}. \tag{4}$$

Интерполяционный тригонометрический полином (2) по системе (4) можно записывать также в виде

$$\mathrm{T}_{n,p}(x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\frac{\sin\frac{2p+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}. \qquad (5)$$

Полиномы (1) с учетом (2) и (3) принимают следующее выражение:

$$U_q^{(n)}(x)=\frac{1}{(2n+1)(q+1)}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\left[\frac{\sin\frac{q+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right]^2. \qquad (6)$$

Рассмотрим неустранимые погрешности первого и второго рода для интерполяционного процесса (6).

Неустранимая погрешность первого рода обусловлена наличием неопределенности в последовательности отсчетов y_k $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$. Рассматривая случайное множество последовательностей отсчетов (множество реализаций), можно записать его свойства

$$\left.\begin{array}{l} M\{y_0',y_1',\ldots y_{2n}'\}=M\{y_0'\},M\{y_1'\}\ldots M\{y_{2n}'\}=y_0,y_1,\ldots y_{2n} \\ D\{y_0',y_1'\ldots y_{2n}'\}=D\{y_0'\},D\{y_1'\}\ldots D\{y_{2n}'\}=\sigma_0^2,\sigma_1^2\ldots\sigma_{2n}^2 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\sigma_0=\sigma_1=\ldots=\sigma_{2n}. \qquad (8)$$

Для случайного множества последовательностей отсчетов можно построить случайное множество полиномов

$$\{U_q^{(n)}(x)\}',$$

для которого

$$M\{U_q^{(n)}(x)\}'=U_q^{(n)}(x). \qquad (9)$$

Неустранимую погрешность для этого случая будем определять выражением

$$\sigma_1^2=D\{U_q^{(n)}(x)\}'. \qquad (10)$$

Используя общую форму интерполяционных полиномов

$$U_q^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\cdot k_{n,q}(x-x_k), \qquad (11)$$

при условии (7) и (8), можно показать, что

$$\sigma_1^2=\sigma_0^2\sum_{k=0}^{2n}k_{n,q}^2(x-x_k). \qquad (12)$$

Аналогично можно сформулировать задачу и для неустранимой погрешности второго рода [1]. При этом уже случайное множество полиномов $\{U_q^{(n)}\ (x)\}''$ строится на случайном множестве последовательностей узлов интерполирования, в среднем совпадающих с последовательностью равноотстоящих узлов (4). Тогда значение неустранимой погрешности второго рода определится выражением

$$\sigma_2^2 = D\{U_q^{(n)}(x)\}'' = d^2 \sum_{k=0}^{2n} y_k^2 [k'_{n,q}(x-x_k)]^2. \tag{13}$$

Считая последовательность отсчетов ограниченной в совокупности некоторой постоянной M, получим неравенство

$$\sigma_2^2 \leqslant d^2 M^2 \sum_{k=0}^{2n} [k'_{n,q}(x-x_k)]^2. \tag{14}$$

Для того, чтобы получить конкретные значения оценок согласно (12) и (14), необходимо вычислить значения соответствующих сумм для ядра $k_{n.q}(x-x_k)$.

Опуская весьма трудоемкие и громоздкие вычисления, запишем окончательный результат

$$\sum_{k=0}^{2n} k_{n,q}^2(x-x_k) = \frac{1}{(2n+1)^2(q+1)^2} \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{\sin\frac{q+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}} \right]^4 = \frac{4}{3} \frac{q\left(q-\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)(q+1)} \tag{15}$$

и соответственно

$$\sum_{k=0}^{2n} [k'_{n,q}(x-x_k)]^2 = \frac{q(q^2+3q+2)(2q^3-2q+3)}{18(q+1)(2n+1)}. \tag{16}$$

В результате для неустранимых погрешностей получим следующие выражения:

$$\sigma_1^2 = \sigma_0^2 \frac{4q\left(q-\frac{1}{2}\right)}{3(2n+1)(q+1)} \tag{17}$$

и

$$\sigma_2^2 \leqslant \frac{d^2 M^2}{18} \cdot \frac{q(q^2+3q+2)(2q^3-2q+3)}{(2n+1)(q+1)}. \tag{18}$$

Проведем обсуждение полученных результатов.

При достаточно больших n и q для неустранимой погрешности σ_1 можно дать более простое выражение, а именно:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \sqrt{\frac{2q}{3n}}. \tag{19}$$

Откуда видно, что при возрастании q и n $(q<n)$ значение σ_1 остается в определенных пределах, определяемых значением погрешности измерения σ_0.

Следовательно, первый процесс С. Н. Бернштейна для приближенных отсчетов остается устойчивым при возрастании порядка интерполяционного полинома. Аналогичные результаты справедливы и для тригонометрического интерполяционного полинома [3]. При этом необходимо заметить следующее. Поскольку общая структура погрешности приближения определяется выражением

$$\sigma^2 = \sigma_n{}^2 + \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2, \tag{20}$$

где σ_n — среднеквадратичная погрешность приближения по точным данным, определяемая лишь сходимостью интерполяционного процесса, то открывается возможность оценки требуемого объема N исходных данных при заданных значениях σ, σ_0 и d. При этом обычно полагают, что все три составляющие σ_n, σ_1 и σ_2 должны быть одного и того же порядка.

Для неустранимой погрешности второго рода σ_2 при больших n и q $(q < n)$ также можно дать более простое неравенство

$$\sigma_2 \leqslant dM \frac{q^2 \sqrt{q}}{3\sqrt{2n+1}}. \tag{21}$$

Откуда видно, что неустранимая погрешность второго рода в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна весьма резко возрастает с увеличением числа q. Это значит, что процесс С. Н. Бернштейна является неустойчивым относительно смещений узлов на отрезке интерполирования. Объясняется этот факт следующим образом. При возрастании q в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна наблюдается усиление локализации ядра $k_{n,q}\ (x - x_k)$ в области центрального максимума, находящегося в точке x_k. Хотя это благоприятно сказывается на сходимости полинома к приближаемой функции, влияние случайной вариации последовательности узлов относительно системы равноотстоящих узлов $\{x_k\}$ на значение полинома в любой точке отрезка приближения становится значительным. Аналитически это сказывается в увеличении значений производной от ядра в δ-окрестности точки x_k при возрастании q.

Таким образом, интерполяционный процесс, построенный методом суммирования по системе тригонометрических интерполяционных полиномов, становится более чувствительным к неопределенности в фиксации узлов интерполирования. Поэтому применение таких сложных аппаратов приближения, каким является интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна, оправдано только в случае весьма точных измерений исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. Наац. Приближение в среднем тригонометрическими полиномами по приближенным узлам. (Настоящий сборник).

2. И. П. Натонсон. Конструктивная теория функций. М., 1949.

3. И. Э. Наац. Применение тригонометрической интерполяции в задачах дискретного измерения. Изв. ТПИ, т. 168., изд. ТГУ, Томск. 1968.