ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 203 1974

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЛУЧАЙНОЙ ХОРДЫ В ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ

И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ ТПИ)

При изучении статистики случайной среды с использованием вероятностно-геометрической модели заполнения трехмерного пространства системой выпуклых тел методом случайной секущей возникает необходимость оценки моментов случайной хорды в телах заполнения [1]. Для практической цели обычно можно ограничиться первыми двумя моментами.

В настоящей работе рассматриваются вопросы методики расчета моментов случайной хорды в выпуклом теле и приводятся оценки первого момента для некоторых тел элементарной формы. Пусть имеется некоторое выпуклое тело T и множество случайных хорд I в этом теле. Множество случайных хорд в свою очередь можно рассматривать как порождение множества всех линий J в трехмерном пространстве R_3, имеющих хотя бы одну общую точку с телом Т. В свою очередь, множество J есть подмножество множества всех линий в R_3.

Задать линию в R_3 можно системой двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} x&=p_1z+q_1 \\ y&=p_2z+q_2 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Параметры p_1, p_2, q_1 и q_2 образуют в совокупности параметрическое пространство P множества линий. Параметрическое пространство P однозначно определяет множество линий в R_3.

Элемент меры пространства P, инвариантный относительно группы вращений и перемещений в R_3, определяется выражением [1]:

$$dP=(1+p_1^2+p_2^2)^{-2}dp_1dp_2dq_1dq_2. \tag{2}$$

Для расчета значений случайной хорды необходимо определить меру множества P', являющегося подмножеством P и соответствующего множеству линий I, секущих данное тело T. Формально это можно сделать путем решения системы

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z)&=0 \\ x&=p_1z+q_1 \\ y&=p_2z+q_2 \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где $F(x, y, z)=0$ уравнение поверхности тела T, и исследованием области, внутри которой корни системы $z_1(x_1, y_1)$ и $z_2(x_2, y_2)$ вещественны и различны. Равенство корней друг к другу соответствует множеству касательных к телу Т. Длина хорды определится как расстояние между корнями в R_3. В результате среднее значение хорды определится выражением

$$\bar{l}=\frac{1}{m(P')}\int\limits_{m(P')} l dP', \tag{4}$$

где $m(P')$ — мера параметрического пространства P', соответствующего множеству случайных секущих. Аналогично определяются остальные моменты величины l. Величина меры множества P' определяется топологическими свойствами тела Т. В частности, доказано, что для выпуклого тела поверхностью S [1]

$$m(P')=\frac{1}{2}\pi S. \tag{5}$$

Использовать описанную методику в общем виде для практических расчетов весьма затруднительно. Поэтому обычно прибегают к следующему приему. Строят вначале подмножество секущих, соответствующее некоторому выбранному направлению n. Мера этого подмножества, как нетрудно определить, равна

$$dF=\frac{1}{2}F(\vec{n})d\omega, \tag{6}$$

где $F(\vec{n})$ — площадь проекции тела Т на некоторую плоскость, перпендикулярную направлению $\vec{n}$, и $d\omega$ — элемент телесного угла. Тогда полная мера множества секущих определится выражением

$$m(P')=\int dF=\frac{1}{2}\int F(\vec{n})d\omega=2\pi\bar{F}. \tag{7}$$

Среднее значение хорды определится интегралом

$$\bar{l}=\frac{1}{m(P')}\cdot\frac{1}{2}\int\int l dF(\vec{n})d\omega. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int l dF(\vec{n})=V \tag{9}$$

и

$$\bar{l}(\vec{n})\cdot F(\vec{n})=V, \tag{10}$$

где V — объем тела и $\bar{l}(\vec{n})$ — среднее значение случайной хорды на множестве секущих, параллельных данному направлению $\vec{n}$. Откуда с учетом (5) можно записать два важных соотношения:

$$\bar{l}=\frac{4V}{S}, \tag{11}$$

$$S=4\bar{F}, \tag{12}$$

где $\bar{F}$ — средняя проекция тела на плоскость в направлении $\vec{n}$ при вращении этого тела относительно этой плоскости.

Вычисление среднего значения случайной хорды и ее моментов более высокого порядка является весьма сложным и трудоемким даже для тел элементарной формы. Однако в ряде случаев можно обойтись оценками указанных величин. В частности, используя соотношения (10), (11), (12), можно построить для среднего значения l ряд оценок для тел элементарной формы.

Пусть выпуклое тело объема V вращается относительно вектора $\vec{n}$ и плоскости проекции, перпендикулярной к $\vec{n}$. Тогда величины $\bar{l}(\vec{n})$ и $F(\vec{n})$ будут меняться в зависимости от ориентации тела в пространстве. Однако произведение этих величин остается при этом постоянным и равным объему V, как это следует из (10). Поэтому если возможно определить для данного тела наибольшее и наименьшее значения ортогональной проекции на некоторую плоскость (т. е. $F_{\max}$ и $F_{\min}$), то для $\bar{l}$ справедливо неравенство

$$\frac{V}{F_{\max}}\leqslant\bar{l}\leqslant\frac{V}{F_{\min}}. \tag{13}$$

В соотношении (13) равенство достигается для шара, у которого $F(\vec{n})=\mathrm{const}$ для всех положений в пространстве относительно плоскости проекций.

В качестве примера можно рассмотреть эллипсоид, для которого $F_{\max}=\pi ab$ и $F_{\min}=\pi bc$ при полуосях, удовлетворяющих условию $a>b>c$. Для такого эллипсоида из (13) имеем неравенство

$$\frac{4}{3}c<\bar{l}<\frac{4}{3}a. \tag{14}$$

Для куба с ребром a

$$F_{\min}=a^2,\ F_{\max}=a^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{и}$$

соответственно

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}a<\bar{l}<a. \tag{15}$$

Для выпуклого тела произвольной формы можно построить нижнюю оценку для $\bar{l}$, используя следующий факт: для выпуклого тела площадь проекции F в любом направлении удовлетворяет неравенству [2]

$$F^2\leqslant F_1^2+F_2^2+F_3^2, \tag{16}$$

где F_1, F_2, F_3 — соответственно значения проекций этого тела в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Откуда нетрудно получить нижнюю оценку для $\bar{l}$, а именно:

$$\frac{V}{\sqrt{F_1{}^2+F_2{}^2+F_3{}^2}}=l'\leqslant\bar{l}. \tag{17}$$

Равенство в (17) достигается для плоской фигуры, поэтому оценка (17) тем точнее, чем более вытянуто тело относительно какой-либо из осей или направления.

Для выпуклого тела объема V можно построить верхнюю оценку для среднего значения случайной хорды, используя замечательное параметрическое свойство шара, которое заключается в том, что среди всех выпуклых тел данного объема шар имеет наименьшую поверхность [2]. Тогда из (11) следует верхняя оценка для среднего значения случайной хорды выпуклого тела

$$\bar{l}\leqslant\bar{l}_0, \tag{18}$$

где $\bar{l}_0$ — среднее значение случайной хорды в шаре объема V. Объединяя (17) и (18), имеем двухстороннюю оценку для значения $\bar{l}$.

Таблица 1

Значение величин a, $в$, c (для эллипсоида полуоси, для параллелепипеда стороны)	Значение величины l' (для эллипсоида и для параллелепипеда)	Значение величины l_0 (для эллипсоида и параллелепипеда)	Среднее значение величины $\bar{l}$ для параллелепипеда
$a=1$, $в=1$, $c=1$	0, 7737 1, 106	1, 3333 1, 6349	1, 3333
1; 0, 75; 0, 75	0, 6247 0, 9370	1, 1006 1, 3661	1, 0908
1; 0,75: 0,25	0, 5121 0, 7682	0, 9615 1, 1933	0, 9230
1; 0,75; 0,5	0, 3078 0, 4615	0, 7631 0, 9472	0, 6316
1; 0,5; 0,5	0, 4444 0, 6666	0,8399 1,0342	0, 8000
1; 0,5; 0,25	0, 2909 0, 4364	0, 6666 0, 8276	0, 5714
1; 0,25; 0,25	0, 2321 0, 3481	0, 5291 0, 6567	0, 4444

$$l'<\bar{l}<\bar{l}_0. \tag{19}$$

Приведем значение величины $\bar{l}_0$, соответствующее телам элементарной формы. В частности, для эллипсоида с полуосями a, b, c имеем

$$\bar{l}_0=\frac{4}{3}\sqrt[3]{abc}, \tag{20}$$

для куба с ребром a

$$\bar{l}_0=\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\pi^{-\frac{1}{3}}a\,. \tag{21}$$

и для параллелепипеда со сторонами a, b, c

$$\bar{l}_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \pi^{-\frac{1}{3}} \sqrt[3]{abc}\,. \qquad (22)$$

Об эффективности полученных оценок можно судить по численным примерам из табл. 1.

На примере (табл. 1) параллелепипеда, для которого $\bar{l}$ определяется весьма просто из (11), видно, что истинное значение $\bar{l}$ при изменении соотношения размеров тела может быть ближе к l' или $\bar{l}_0$. Если тело более вытянуто, то $\bar{l}$ ближе к l', если все размеры тела ближе друг к другу, $\bar{l}$ ближе к $\bar{l}_0$. Если учесть, что вычисление значений $\bar{l}$ для выпуклого тела является весьма трудоемким и сложным, особенно это касается моментов более высокого порядка, то приведенные оценки можно считать вполне удовлетворительными для практических целей. Это особенно относится к величине $\bar{l}_0$, так как при изучении вероятностно-геометрических моделей случайных сред, как правило, приходится прибегать к модели заполнения пространства шарами [1]. Если же требуются более точные оценки значений $\bar{l}$ и ее моментов, то они могут быть получены путем цифрового моделирования на ЭЦВМ геометрической модели пересечения случайной линией выпуклого тела. В этих задачах метод статистических испытаний является, очевидно, единственным универсальным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. G. Kendall, P. Moran. Geometrical probability. London. 1963.
2. В. Бляшке. Круг и шар. «Наука». М., 1967.