

Будем проектировать эллипсоид на некоторую плоскость W в направлении оси x системы S . Длина хорды эллипсоида в направлении оси x определяется как разность корней x_1 и x_2 уравнения (2), решенного относительно x , т. е.

$$l_x = x_1 - x_2. \quad (3)$$

Соответственно имеем уравнение границы проекции эллипсоида P_x на плоскость W в направлении x :

$$l_x = 0. \quad (4)$$

Среднее значение хорды эллипсоида в направлении оси x для какого-то фиксированного положения системы S' (тоже эллипсоида) определится интегралом

$$\bar{l}_x = \frac{1}{P_x} \int_{P_x} l_x dP. \quad (5)$$

Соответственно второй момент

$$\bar{l}_x^2 = \frac{1}{P_x} \int_{P_x} l_x^2 dP. \quad (6)$$

Опуская вычисления, приведем окончательный результат:

$$\bar{l}_x = \frac{4}{3} \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 l_1^2 + a^2 c^2 l_2^2 + a^2 b^2 l_3^2}}, \quad (7)$$

$$P_x = \pi \sqrt{b^2 c^2 l_1^2 + a^2 c^2 l_2^2 + a^2 b^2 l_3^2}, \quad (8)$$

$$\bar{l}_x^2 = \frac{2 a^2 b^2 c^2}{b^2 c^2 l_1^2 + a^2 c^2 l_2^2 + a^2 b^2 l_3^2}. \quad (9)$$

Из соотношений (7) и (8), в частности, видно, что величина

$$\bar{l}_x \cdot P_x = \text{const} = \frac{4}{3} \pi abc, \text{ т. е. } \text{объему эллипсоида.}$$

Введем обозначение

$$L(l_1, l_2, l_3) = b^2 c^2 l_1^2 + a^2 c^2 l_2^2 + a^2 b^2 l_3^2 \quad (10)$$

и перейдем от направляющих косинусов l_1, l_2, l_3 к системе углов Эйлера ϑ, ψ, φ . В результате получим

$$\begin{aligned} L(\vartheta, \psi, \varphi) = & 2c^2(a^2 - b^2) \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi + \\ & + c^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \psi (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) + \\ & + c^2 \cos^2 \psi (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) + a^2 b^2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \psi. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11) имеем:

$$\bar{l}_x = \frac{4}{3} \frac{abc}{\sqrt{L(\vartheta, \psi, \varphi)}}, \quad (12)$$

$$P_x = \pi \sqrt{L(\vartheta, \psi, \varphi)}, \quad (13)$$

$$\bar{l}_x^2 = \frac{2a^2b^2c^2}{L(\vartheta, \psi, \varphi)}. \quad (14)$$

Для определения средних значений указанных величин по всем возможным ориентациям эллипсоида относительно плоскости W необходимо вычислить интегралы по ϑ , ψ , φ от соответствующих выражений. Имеем

$$\bar{l} = \frac{32}{3\pi^3} abc \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{L(\vartheta, \psi, \varphi)}}, \quad (15)$$

$$\bar{l}^2 = \frac{16}{\pi^3} a^2b^2c^2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{L(\vartheta, \psi, \varphi)}, \quad (16)$$

$$\bar{P} = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} \sqrt{L(\vartheta, \psi, \varphi)} d\varphi, \quad (17)$$

$$\bar{P}^2 = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{\pi/2} L(\vartheta, \psi, \varphi) d\varphi. \quad (18)$$

Из общих выражений (12—14), а также (15—16) можно рассмотреть некоторые частные случаи.

1. Пусть $a=b=c=R$, т. е. эллипсоид превращается в шар, тогда

$$L(\vartheta, \psi, \varphi) = R^4$$

и соответственно

$$\bar{l} = \frac{4}{3}R, \quad (19)$$

$$\bar{l}^2 = 2R^2. \quad (20)$$

2. Определим среднее значение хорды эллипсоида, обусловленное вращением последнего вокруг оси y . В этом случае

$$-\pi \leq \vartheta \leq \pi, \quad \varphi = \psi = \pi/2 \text{ и}$$

$$L(\vartheta) = b^2(c^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta). \quad (21)$$

Соответственно имеем

$$\bar{l} = \frac{8}{3\pi} ac \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{8a}{3\pi} \cdot F(k), \quad (22)$$

где $F(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода,

$$k^2 = (a^2 - c^2)/a^2 \quad (a > c).$$

Для остальных величин имеем

$$\bar{l}^2 = 2ac, \quad (23)$$

$$\bar{P} = 2ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta = 2ab E(k), \quad (24)$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, и

$$\bar{P}^2 = \frac{\pi^2 b^2}{2} (a^2 + c^2). \quad (25)$$

3. При вращении эллипсоида вокруг оси z имеем $\vartheta=0$, $\psi=0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и

$$L(\varphi) = c^2 (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi). \quad (26)$$

Значения остальных величин аналогичны результатам (22—25).

4. При вращении эллипсоида вокруг оси x имеем

$$\begin{aligned} \varphi = \psi = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \text{ и} \\ L(\vartheta, \psi, \vartheta) = c^2 b^2, \\ \bar{l} = \frac{4}{3} a, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\bar{l}^2 = 2 a^2. \quad (28)$$

Этот же результат справедлив при вращении эллипсоида вокруг любой оси, если направление проектирования совпадает с направлением этой оси. Таким образом, средние значения случайных хорд эллипсоида \bar{l}_x , \bar{l}_y , \bar{l}_z по трем взаимно перпендикулярным направлениям, совпадающим с его главными осями, равны

$$\frac{4}{3} a, \frac{4}{3} b \text{ и } \frac{4}{3} c \text{ соответственно.}$$

Выражения (12), (13) и (14) могут быть положены в основу численного расчета значений, соответствующих величине при данных a , b и c .

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Э. На а ц. К определению статистических свойств случайной хорды в выпуклом теле. (Настоящий сборник).