ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ОБОЛОЧКАХ В РЕЖИМЕ ИХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО РАЗОГРЕВА

В. В. САЛОМАТОВ

(Представлена научным семинаром теплоэнергетического факультета)

В статье исследуется процесс нестационарного переноса тепла в оболочках, когда тепловые потоки, формирующие температурное поле, связаны с соответствующими поверхностными температурами произвольными нелинейными зависимостями. Строятся аналитически точные решения для квазистационарных членов задачи. Переходный процесс исследуется с помощью однопараметрического метода из теории пограничного слоя.

Высокотемпературный разогрев оболочек различной геометрической формы для большинства практических условий теплообмена математически можно формулировать в виде краевой задачи

$$\frac{1}{\xi^{\nu}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^{\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}, \tag{1}$$

$$\Theta(\xi, 0)=\Theta_0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_1}=f_1\left[\Theta(\xi_1, Fo)\right], \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_2}=f_2\left[\Theta(\xi_2, Fo)\right], \tag{4}$$

где ν — постоянная формы, численно равная 0, 1, 2 соответственно для плоской, цилиндрической и сферической оболочек, f_1, f_2 — произвольные интегрируемые функции относительно поверхностных температур. Из-за структурной сложности граничных условий (3) — (4) не удается получить решение краевой задачи (1) — (4) в явном виде. В связи с этим в работе предлагается метод приближенного решения указанной проблемы, который позволяет получать наиболее рациональные в практическом отношении расчетные соотношения для больших и малых значений безразмерного времени.

1. Температурное поле плоской оболочки ($\nu=0$, $\xi_1=1$, $\xi_2=0$).

Применяя к (1) — (4) интегральное преобразование Лапласа, получим решение преобразованной задачи

$$W(\xi, s)=\frac{\Theta_0}{s}+U_1(1, s)\frac{\operatorname{ch}\sqrt{s}\,\xi}{\sqrt{s}\operatorname{sh}\sqrt{s}}-U_2(0, s)\frac{\operatorname{ch}\sqrt{s}\,(\xi-1)}{\sqrt{s}\operatorname{sh}\sqrt{s}}. \tag{5}$$

Здесь

$$W(\xi, s)=\int_0^{\infty}\Theta(\xi, \mathrm{Fo})\exp(-s\mathrm{Fo})\,d\mathrm{Fo},$$

$$U_1(1, s) = \int_0^\infty f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})] \exp(-s\mathrm{Fo})\, d\mathrm{Fo},$$

$$U_2(0, s) = \int_0^\infty f_2[\Theta(0, \mathrm{Fo})] \exp(-s\mathrm{Fo})\, d\mathrm{Fo}.$$

Осуществляя обратный переход, представим формальное решение в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \Theta_0 + \int_0^{\mathrm{Fo}} \{f_1[\Theta(1,\eta)] + f_2[\Theta(0, \eta)]\}\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{6} f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})](1 - 3\xi^2) - \frac{1}{6} f_2[\Theta(0, \mathrm{Fo})][1 - 3(1-\xi)^2] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\mu_n^2} \Big\{ \cos \mu_n \xi \int_0^{\mathrm{Fo}} f_1'[\Theta(1, \eta)] \exp[-\mu_n^2(\mathrm{Fo} - \eta)]\, d\eta +$$

$$+ \cos \mu_n (1 - \xi) \int_0^{\mathrm{Fo}} f_2'[\Theta(1, \eta)] \exp[-\mu_n^2(\mathrm{Fo} - \eta)]\, d\eta \Big\}. \qquad (6)$$

Полагая в (6) последовательно $\xi = 1$ и $\xi = 0$, можно получить систему двух нелинейных функциональных уравнений типа Вольтерра второго рода для нахождения поверхностных температур. Доказывая абсолютную и равномерную сходимость бесконечных рядов, используя, например, интегральные оценки в [1], приходим к утверждению сходимости метода последовательных приближений Коши — Пикара при решении указанных интегральных уравнений. В качестве нулевых приближений целесообразно выбрать свободные члены полученных функциональных уравнений. Однако с целью получения наиболее удобных для инженерной практики расчетных соотношений, в структуре которых не содержались бы суммы бесконечных рядов, решения проводятся отдельно для квазистационарного и переходного периодов.

Благодаря неравенствам $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots$ и наличия множителей экспоненциального типа сумма ряда (6), начиная с некоторого значения Fo, становится ничтожно малой по сравнению с остальными членами. С этого момента наступает стадия квазиустановившегося режима. Поверхностные температуры для этой стадии находятся из соотношений

$$\mathrm{F_0} = \int_{\Theta^*(1,0)}^{\Theta(1,\mathrm{Fo})} \frac{1 - \frac{1}{3} f_1'(\Theta) + \frac{1}{6}[f_2^+(\Theta)]'}{f_1(\Theta) + f_2^+(\Theta)}\, d\Theta, \qquad (7)$$

где $\Theta_*(1,0)$ определяется как действительный корень уравнения

$$\Theta_*(1, 0) = \Theta_0 + \frac{1}{3} f_1[\Theta_*(1, 0)] - \frac{1}{6} f_2^+[\Theta_*(1, 0)]$$

и $\qquad (8)$

$$f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})] - f_2[\Theta(0, \mathrm{Fo})] = 2[\Theta(1, \mathrm{Fo}) - \Theta(0, \mathrm{Fo})].$$

Зная законы изменения температур на граничных поверхностях, можно рассчитать и все поле температур в квазиустановившемся периоде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \Theta(1, \mathrm{Fo}) - \frac{1}{6} f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})][2 + (1 - 3\xi^2)] -$$

$$- \frac{1}{6} f_2[\Theta(0, \mathrm{Fo})][2 - 3(1 - \xi)^2]. \qquad (9)$$

Начальная стадия процесса теплового переноса может быть найдена методом теории пограничного слоя. В соответствии с общей теорией интегрального метода вводится понятие толщины термического слоя [2]. В нашем случае δ_1 — для внутренней и δ_2 — для наружной частей оболочек. Температурный профиль в зоне теплового возмущения будем аппроксимировать многочленом третьей степени от ξ для внутренней

$$\Theta_1(\xi, \mathrm{Fo}) = C_1' + C_2'(\delta_1 - \xi) + C_3'(\delta_1 - \xi)^2 + C_4'(\delta_1 - \xi)^3, \tag{10}$$

для внешней

$$\Theta_2(\xi, \mathrm{Fo}) = C_1'' + C_2''(\delta_2 - (1 - \xi)) + C_3''(\delta_2 - (1 - \xi))^2 + C_4''(\delta_2 - (1 - \xi))^3. \tag{11}$$

Для определения восьми неизвестных коэффициентов в (10) — (11) воспользуемся следующими граничными условиями

$$\Theta(\xi, 0)\big|_{\xi=\delta_1,\,\delta_2} = \Theta_0; \qquad \left.\frac{\partial\Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=\delta_1,\,\delta_2} = 0; \qquad \left.\frac{\partial^2\Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=\delta_1,\,\delta_2} = 0;$$

а также условиями (3), (4).

С учетом найденных значений коэффициентов аппроксимирующих полиномов, соотношения (10) — (11) запишутся в виде

$$\Theta_1(\xi, \mathrm{Fo}) = \Theta_0 + \frac{f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})]}{3\delta_1^2}[\delta_1 - \xi]^3, \tag{12}$$

$$\Theta_2(\xi, \mathrm{Fo}) = \Theta_0 + \frac{f_2[\Theta(0, \mathrm{Fo})]}{3\delta_2^2}[\delta_2 - (1 - \xi)]^3. \tag{13}$$

Неизвестная толщина термического слоя δ_1 или δ_2 связана с соответствующей поверхностной температурой соотношением

$$\delta_i = \frac{3(\Theta_{\text{пов}_i} - \Theta_0)}{f[\Theta_{\text{пов}_i}]}. \tag{14}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение процесса (1) по толщине соответствующего термического слоя, можно определить из полученного интеграла теплового баланса неизвестную поверхностную температуру. Выполнив указанные операции и решив полученные дифференциальные уравнения, имеем, что неизвестные температуры на граничных поверхностях рассчитываются по следующим выражениям

$$\frac{4}{3}\mathrm{Fo} = \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta(1, \mathrm{Fo})} \frac{2(\Theta - \Theta_0) f_1(\Theta) - f_1'(\Theta)(\Theta - \Theta_0)^2}{f_1^3(\Theta)}\, d\Theta, \tag{15}$$

$$\frac{4}{3}\mathrm{Fo} = \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta(0, \mathrm{Fo})} \frac{2(\Theta - \Theta_0) f_2(\Theta) - f_2'(\Theta)(\Theta - \Theta_0)^2}{f_2^3(\Theta)}\, d\Theta. \tag{16}$$

Интегралы в соотношениях (15), (16) для большинства условий внешнего теплообмена, как правило, представимы в элементарных функциях.

Расчет по соотношениям (12), (13) можно проводить до тех пор, пока сумма толщин термических слоев не превысит толщину оболочки, что аналитически выражается в виде

$$\frac{3[\Theta(1, \mathrm{Fo}) - \Theta_0]}{f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})]} + \frac{3[\Theta(0, \mathrm{Fo}) - \Theta_0]}{f_2[\Theta(0, \mathrm{Fo})]} \leqslant 1.$$

2. Температурное поле цилиндрической оболочки

$$\left(\nu = 1, \qquad \xi_1 = 1, \qquad \xi_2 = p, \qquad p = \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Переводя уравнения (1)—(4) с помощью преобразования Лапласа в область изображений и решая преобразованную задачу, получим

$$W(\xi, s) = \frac{\Theta_0}{s} + U_1(1, s)\frac{I_0(\sqrt{s}\,\xi)}{\sqrt{s}\,I_1(\sqrt{s})} - U_2(p, s)\frac{I_0[\sqrt{s}(\xi - p)]}{\sqrt{s}\,I_1(\sqrt{s})}. \qquad (17)$$

Переводя в (17) изображения в оригиналы функций, запишем окончательное решение в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \Theta_0 + \frac{2}{1-p^2}\{\int\limits_0^{\mathrm{Fo}}[f_2(\Theta(p, \vartheta)) + f_1(\Theta(1, \vartheta))]\,d\vartheta\} -$$

$$-\frac{1}{1-p^2}\left[\frac{1}{4}(1-2\xi^2) + p^2\left(\ln\xi + \frac{1}{1-p^2}\ln p + \frac{3}{4}\right)\right]f_2[\Theta(p, \mathrm{Fo})] -$$

$$-\frac{p^2}{1-p^2}\left\{\frac{1}{4}[1-2(p-\xi)^2] + p^2\left[\ln\frac{\xi}{p} + \frac{1}{1-p^2}\ln p + \frac{3}{4}\right]\right\}f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})] +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\mu_n^2}\cdot\frac{J_1(\mu_n p)\,J_1(\mu_n)}{J_1^2(\mu_n p) - J_1^2(\mu_n)}[J_0(\mu_n\xi)\,Y_1(\mu_n p) - Y_0(\mu_n\xi)\,J_1(\mu_n p)] \times$$

$$\times\int\limits_0^{\mathrm{Fo}}[f_2'[\Theta(p, \vartheta)] + f_1'[\Theta(1, \vartheta)]]\exp[-\mu_n^2(\mathrm{Fo} - \vartheta)]\,d\vartheta, \qquad (18)$$

где μ_n — корень трансцендентального уравнения

$$J_1(\mu_n p)\,Y_1(\mu_n) = Y_1(\mu_n p)\,J_1(\mu_n).$$

Полагая в (18) $\xi = 1$ и $\xi = p$, убеждаемся, что неизвестные температуры на поверхностях цилиндрической оболочки удовлетворяют системе нелинейных функциональных уравнений. Замкнутое решение полученной системы интегральных уравнений возможно только в стадии упорядоченного режима. Аналогично поверхностные температурные функции находятся из следующих связей.

$$\frac{1-p^2}{2}\mathrm{Fo} = \int\limits_{\Theta_*(1,0)}^{\Theta(1,\mathrm{Fo})}\frac{1 - N(p)[f_2^+(\Theta)]' + M(p)f_1'(\Theta)}{f_1(\Theta) + f_2^+(\Theta)}\,d\Theta,$$

$$N(p) = \frac{\frac{1}{4} - p^2\left(\frac{\ln p}{1-p^2} + \frac{3}{4}\right)}{1-p^2},$$

$$M(p) = \frac{p^2\left[\frac{1}{4}(1-2(p-1)^2) + \ln\frac{1}{p} + \frac{\ln p}{1-p^2} + \frac{3}{4}\right]}{1-p^2}, \qquad (19)$$

где $\Theta_*(1, 0)$ — находится как корень алгебраического уравнения

$$\Theta_*(1, 0) = \Theta_0 + N(p)f_2^+[\Theta_*(1, 0)] - M(p)f_1[\Theta_*(1, 0)]$$

и

$$\Theta(1, \mathrm{Fo}) - \Theta(p, \mathrm{Fo}) = \frac{\frac{1}{2}(1-p^2) + p^2\ln p}{1-p^2}[f_2[\Theta(p, \mathrm{Fo})] +$$

$$+p^2 f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})]]. \qquad (20)$$

По найденным температурам поверхностей на основании (17) можно определить температурное поле в любом сечении оболочки в стадии квазистационарного режима

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \Theta(1, \mathrm{Fo}) - \frac{f_2[\Theta(p, \mathrm{Fo})]}{1-p^2} \cdot \left[\frac{1}{4}(1-2\xi^2) + p^2 \ln \xi + \frac{1}{4}\right] -$$

$$- \frac{p^2 f_1[\Theta(1, \mathrm{Fo})]}{1-p^2} \cdot \left[p^2 \ln \xi - \frac{1}{2}(p-\xi)^2 + \frac{1}{2}(1-p)^2\right]. \quad (21)$$

Начальная стадия приближенно может быть рассчитана также с помощью интегрального метода Кармана — Польгаузена.

Аппроксимируем неизвестные профили температур в зоне тепловых возмущений кубическими зависимостями (12) — (13). Неизвестные температуры на внешних границах цилиндрической оболочки найдутся аналогично из интеграла теплового баланса и рассчитываются по соотношениям

$$\frac{8}{3}\mathrm{Fo} = \int_{\Theta_0}^{\Theta(1, \mathrm{Fo})} \frac{2(\Theta-\Theta_0) f_1(\Theta) - f_1'(\Theta)(\Theta-\Theta_0)^2}{f_1^3(\Theta)} d\Theta \quad (22)$$

$$\frac{8}{3}\mathrm{Fo} = \int_{\Theta_0}^{\Theta(p, \mathrm{Fo})} \frac{2(\Theta-\Theta_0) f_2(\Theta) - f_2'(\Theta)(\Theta-\Theta_0)^2}{f_2^3(\Theta)} d\Theta. \quad (23)$$

Совершенно аналогично решается задача и для сферической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Саломатов, Э. И. Гончаров. Известия АН СССР, «Энергетика и транспорт», № 4, 1967.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Изд-во ИЛ, 1956.