ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТЕЛАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ, ПОДВЕРЖЕННЫХ РАДИАЦИОННОМУ НАГРЕВУ

В. В. САЛОМАТОВ

(Представлена научным семинаром теплоэнергетического факультета)

В инженерной практике теплофизические процессы протекают в конечномерных геометрических системах. В связи с этим разработка эффективных методов решения пространственных задач теории теплового переноса является основным практическим требованием.

В настоящей работе предлагаются приближенные методы решения задач многомерной теплопроводности с граничными условиями радиационного типа. При этом в первом разделе исследуется нестационарный теплоперенос при условии существенной зависимости теплофизических коэффициентов от температуры, а во втором разделе рассматривается температурный режим твердых тел при наличии постоянных термических характеристик.

I. Переменные теплофизические характеристики

Прогрев тел конечных размеров лучистым теплом, когда коэффициент теплопроводности и теплоемкость зависят от температуры, является наиболее трудной математической проблемой теории теплопроводности, так как система дифференциальных уравнений, описывающая процесс нестационарного теплопереноса, становится дважды нелинейной. Внутренняя нелинейность, содержащаяся в дифференциальном уравнении процесса, обусловлена переменностью термических коэффициентов с температурой; внешняя нелинейность, имеющая место в граничном условии, вызвана наличием нелинейной связи между тепловым потоком на поверхности тела с температурой этой поверхности. При аналитическом исследовании систему линеаризуют. Традиционные приемы линеаризации заключаются в предположении постоянства теплофизических коэффициентов ($\lambda(T) = \mathrm{const}$, $c(T) = \mathrm{const}$) и замене нелинейного граничного условия радиационного типа линейным граничным условием III рода с введением условного коэффициента теплоотдачи лучеиспусканием. Вполне естественно, что линеаризованное решение достаточно хорошо описывает картину температурного поля только в случае малых нелинейностей системы (практически на отдельных этапах процесса нагрева). В целом же рассматриваемая проблема является существенно нелинейной, поэтому для правильного описания температурного распределения нелинейность системы должна учитываться. В настоящее время исследуемая проблема в общем виде может быть решена только приближенно: либо методом конечных разностей (хотя вопрос о сходимости сеточного метода в каждом конкретном случае должен быть исследован особо), либо моделированием изучаемого явления теплового переноса.

В наших предыдущих работах [1, 2] было показано, что решение подобного рода одномерных задач теплопроводности может быть успешно проведено для некоторых частных законов изменения термических коэффициентов с температурой, а именно: если

$$\lambda(\mathrm{T}) = \varkappa_1 \mathrm{T}^3, \tag{1.1}$$

$$c(\mathrm{T}) = \varkappa_2 \mathrm{T}^3. \tag{1.2}$$

Пропорциональность $\lambda(\mathrm{T})$, $c(\mathrm{T})$ кубу абсолютной температуры характерна для многих кристаллов в некоторых температурных диапазонах. Отметим, что с учетом (1.1, 1.2) нелинейное дифференциальное уравнение и нелинейное граничное условие радиационного типа автоматически становятся линейными относительно температурного аналога

$$\eta(\mathrm{T}) = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \lambda(\mathrm{T})\, d\mathrm{T}.$$

Очевидно, что при других законах $\lambda(\mathrm{T})$ и $c(\mathrm{T})$, отличных от (1.1), (1.2), с целью получения достаточно точного приближенного решения в расчетном интервале изменения температур или, если этот интервал достаточно велик, то на его отдельных участках термические параметры могут быть аппроксимированы отрезками кубических парабол. Укажем, что одновременно и независимо аналогичный подход к исследованию нелинейной теплопроводности в телах классической формы применен в работе [3]. Там же приводится вариант оценки погрешности расчета при условии параболической аппроксимации термических коэффициентов.

Распространим предложенный метод решения на многомерные задачи лучистого прогрева. В качестве примера исследуем процесс нелинейной теплопроводности в прямоугольном параллелепипеде, математическое описание которого дается системой уравнений:

$$c(\mathrm{T})\rho \frac{\partial \mathrm{T}(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(\mathrm{T}) \frac{\partial \mathrm{T}(x, y, z, \tau)}{\partial x}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(\mathrm{T}) \frac{\partial \mathrm{T}(x, y, z, \tau)}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(\mathrm{T}) \frac{\partial \mathrm{T}(x, y, z, \tau)}{\partial z}\right],$$

$$(\tau > 0, \quad -R_1 < x < +R_1, \quad -R_2 < y < +R_2, \quad -R_3 < z < +R_3), \tag{1.3}$$

$$\mathrm{T}(x, y, z, 0) = \mathrm{T}_0 = \mathrm{const}, \tag{1.4}$$

$$\pm\lambda(\mathrm{T}) \frac{\partial \mathrm{T}(\pm R_1, y, z, \tau)}{\partial x} = \sigma_{\text{в}}[\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}^4(\pm R_1, y, z, \tau)], \tag{1.5}$$

$$\pm\lambda(\mathrm{T}) \frac{\partial \mathrm{T}(x, \pm R_2, z, \tau)}{\partial y} = \sigma_{\text{в}}[\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}^4(x, \pm R_2, z, \tau)], \tag{1.6}$$

$$\pm\lambda(\mathrm{T}) \frac{\partial \mathrm{T}(x, y, \pm R_3, \tau)}{\partial z} = \sigma_{\text{в}}[\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}^4(x, y, \pm R_3, \tau)]. \tag{1.7}$$

Принимая во внимание условие (1.1) и (1.2), докажем, что решение задачи (1.3—1.7) может быть представлено в виде

$$\frac{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}^4(x, y, z, \tau)}{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}_0^4} = \frac{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}^4(x, \tau)}{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}_0^4} \cdot \frac{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}^4(y, \tau)}{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}_0^4} \cdot \frac{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}^4(z, \tau)}{\mathrm{T}_{\text{c}}^4 - \mathrm{T}_0^4}, \tag{1.8}$$

здесь $\mathrm{T}(x,\tau)$, $\mathrm{T}(y,\tau)$, $\mathrm{T}(z,\tau)$ — известные решения для трех неограниченных пластин, пересечением которых образован параллелепипед. Соотношение (1.8), в сущности, выражает известное в теории теплопроводности правило перемножения температурных критериев, где сомножитель $\frac{T_c^4 - T^4}{T_c^4 - T_0^4}$ представляет степень незавершенности прогрева при радиационном теплообмене. При доказательстве, естественно, полагаем, что начальные и граничные условия для неограниченных пластин остаются такими же, как и для параллелепипеда, а именно:

$$T(x, 0) = T(y, 0) = T(z, 0) = T_0 = \mathrm{const} \tag{1.9}$$

$$\pm \varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(\pm R_1, \tau)}{\partial x} = \sigma_в [T_c^4 - T^4(\pm R_1, \tau)], \tag{1.10}$$

$$\pm \varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(\pm R_2, \tau)}{\partial y} = \sigma_в [T_c^4 - T^4(\pm R_2, \tau)], \tag{1.11}$$

$$\pm \varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(\pm R_3, \tau)}{\partial z} = \sigma_в [T_c^4 - T^4(\pm R_3, \tau)]. \tag{1.12}$$

Удовлетворим дифференциальному уравнению (1.3). В результате имеем:

$$[T_c^4 - T^4(y, \tau)][T_c^4 - T^4(z, \tau)] \left\{\rho\varkappa_2 T^3 \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x}\right]\right\} +$$

$$+ T_c^4 - T^4(x, \tau)][T_c^4 - T^4(z, \tau)] \left\{\rho\varkappa_2 T^3 \frac{\partial T(y, \tau)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(y, \tau)}{\partial y}\right]\right\} +$$

$$+ [T_c^4 - T^4(x, \tau)][T_c^4 - T^4(y, \tau)] \left\{\rho\varkappa_2 T^3 \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial z}\right]\right\} = 0.$$

Выражения в фигурных скобках равны нулю, так как представляют из себя дифференциальные уравнения процесса для бесконечных пластин. Значит, соотношение (1.8) превращает в тождество (1.3).

Подставим (1.8) в граничные условия (1.10) — (1.12), после несложных преобразований

$$\left\{\mp \varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(\pm R_1, \tau)}{\partial x} - \sigma_в [T_c^4 - T^4(\pm R_1, \tau)]\right\} \times$$
$$\times \frac{[T_c^4 - T^4(y, \tau)][T_c^4 - T^4(z, \tau)]}{(T_c^4 - T_0^4)^2} = 0,$$
$$\left\{\mp \varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(\pm R_2, \tau)}{\partial y} - \sigma_в [T_c^4 - T^4(\pm R_2, \tau)]\right\} \times$$
$$\times \frac{[T_c^4 - T^4(x, \tau)][T_c^4 - T^4(z, \tau)]}{(T_c^4 - T_0^4)^2} = 0,$$
$$\left\{\mp \varkappa_1 T^3 \frac{\partial T(\pm R_3, \tau)}{\partial z} - \sigma_в [T_c^4 - T^4(\pm R_3, \tau)]\right\} \times$$
$$\times \frac{[T_c^4 - T^4(x, \tau)][T_c^4 - T^4(y, \tau)]}{(T_c^4 - T_c^4)^2} = 0 \tag{1.13}$$

убеждаемся, что выражение (1.8) удовлетворяет поставленным граничным условиям. Легко видеть, что соотношение (1.8) соответствует и начальному условию.

Таким образом, выражение (1.8), удовлетворяющее всем поставленным условиям, по теореме единственности является точным решением задачи (1.3) (1.7).

Аналогично решение задачи для короткого цилиндра имеет вид

$$\frac{T_c^4 - T^4(r, z, \tau)}{T_c^4 - T_0^4} = \frac{T_c^4 - T^4(r, \tau)}{T_c^4 - T_0^4} \cdot \frac{T_c^4 - T^4(z, \tau)}{T_c^4 - T_0^4}. \tag{1.14}$$

Для практических инженерных расчетов по формулам (1.8), (1.14) можно воспользоваться номограммами по определению температуры на поверхности и в центре неограниченной пластины и бесконечного цилиндра для условий конвективного теплообмена, которые приведены в [4], заменяя соответствующие критерии на их аналоги

$$Bi^* = \frac{4\sigma_в R}{\varkappa_1}, \qquad Fo^* = \frac{\varkappa_1 \tau}{\rho \varkappa_2 R^2}, \qquad \theta^* = \frac{T_c^4 - T^4}{T_c^4 - T_0^4}.$$

Погрешность расчета по предложенному методу будет определяться тем, насколько точно аппроксимацией (1.1), (1.2) воспроизводится истинный закон изменения $\lambda(T)$ и $c(T)$ с температурой. Очевидно, следуя этому методу, можно получать надежные данные только при возрастающих законах λ и c с температурой. Метод аналитического решения становится малоэффективным в случае убывающих функций $\lambda(T)$ и $C(T)$, хотя необходимо отметить, что такие закономерности встречаются более редко. Для инженерной практики наиболее характерны случаи возрастающих зависимостей $\lambda(T)$ и $c(T)$.

При расчете по методу параболической аппроксимации, по-видимому, самым наихудшим будет случай, когда теплофизические константы остаются неизменными в течение всего процесса нагрева. Следовательно, для установления максимально возможной погрешности расчета по изложенному методу необходимо вести сравнение со случаем нагрева при постоянных термических коэффициентах, так как при любых возрастающих законах $\lambda(T)$, $c(T)$ погрешность будет, естественно, меньше, поскольку точность аппроксимации существенно возрастает.

В целях сопоставления расчетных вариантов необходимо провести усреднение переменного термического коэффициента в заданном интервале изменения температур. Используя обычную теорему о среднем, имеем

$$\bar{\lambda}_{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_i}^{T_i+\Delta T} \lambda(T)\, dT = \text{const}; \quad \bar{c}_{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_i}^{T_i+\Delta T} c(T)\, dT = \text{const}.$$

Учитывая, что $\lambda(T)$ и $c(T)$ определяются (1.1) и (1.2), можно найти значения

$$\varkappa_1 = \frac{4\bar{\lambda}_{\Delta T}}{4T_i^3 + 6T_i^2 \Delta T + 4T_i (\Delta T)^2 + (\Delta T)^3} \tag{1.15}$$

и

$$\varkappa_2 = \frac{4\bar{c}_{\Delta T}}{4T_i^3 + 6T_i^2 \Delta T + 4T_i (\Delta T)^2 + (\Delta T)^3}, \tag{1.16}$$

которые и будут отвечать необходимому условию аппроксимации в диапазоне повышения температуры ΔT.

Чтобы не выйти за пределы разумной погрешности, целесообразно весь расчет вести по этапам. На каждом этапе необходимо выбирать допустимое значение ΔT, которое будет гарантировать заданную точность расчета. Выбор допустимого значения для тел классической формы может быть произведен согласно рекомендации, указанной в работе [3]. Дополнительный контроль может рационально осуществляться путем сравнения с данными номографического расчета с использованием рис. [4], имеющими достаточно высокую точность. Что касается тел конечных размеров, то величина допустимого повышения температуры нами была апробирована посредством сопоставления данных аналитического расчета с результатами численного интегрирования на ЭВМ. В итоге было установлено, что максимально возможная погрешность в 3—4% не будет превышена во всех расчетных вариантах, если $\Delta\Theta_{I} = 0{,}60$, $\Delta\Theta_{II} = 0{,}25$, $\Delta\Theta_{III} = 0{,}15$.

Численный пример, иллюстрирующий разработанный метод решения

Исследуем характер изменения температуры в центре и середине боковой поверхности короткого цилиндра размерами $2R = 2H = 0{,}3$ *м*, который симметрично нагревается в условиях постоянной мощности излучателя ($T_c = 1273°K$) от начальной температуры $T_0 = 293°K$. Теплофизические характеристики численно равны: $\lambda = 34{,}9 \dfrac{вт}{м\ град}$,

$$a = 0{,}0225 \frac{м^2}{час}, \quad \rho = 7800 \frac{кг}{м^3}, \quad \sigma_в = 4{,}24 \frac{вт}{м^2\, град^4}.$$

Результаты расчета с использованием рис. в [4] и формул (1.14) — (1.16) сведены в табл. 1. Здесь же приводятся данные расчета зональным методом [5] и проведено сопоставление результатов, полученных двумя различными методами.

Таблица 1

Температурное поле короткого цилиндра в процессе нагрева

τ час	T (0, 0, τ) °K		δ %	T (R, 0, τ) °K		δ %
	согласно (1.14)	данные [5]		согласно (1.14)	данные [5]	
0,1	323,1	319	1,3	529,6	533	0,6
0,2	412,1	417	1,2	652,6	668	2,3
0,3	547,3	551	0,7	784	788	0,5
0,4	694,2	683	1,6	916,5	899	1,9
0,5	806	797	1,1	1005	988	1,7
0,6	917,8	905	1,4	1079	1061	1,9
0,8	1083	1063	1,9	1180	1156	2,1
1,0	1177	1165	1,0	1245	1231	1,1
1,5	1279	1271	0,6	1287	1289	0,2

II. Постоянные теплофизические параметры

Если считать, что в процессе нагрева термические коэффициенты остаются постоянными, то формально математические трудности, связанные с решением нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности, снимаются. Нелинейность сохраняется лишь в граничном условии. Но даже и в этом случае классические методы решения оказываются бессильными.

Совместно с В. В. Ивановым [7] предлагается эффективный метод решения многомерной задачи лучистой теплопроводности, который справедлив для не слишком «массивных» в тепловом отношении тел.

Схему метода иллюстрируем на примере прогрева прямоугольного бруса. Распространение тепла в исследуемом образце описывается системой уравнений

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta(x, y, \tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta(x, y, \tau)}{\partial y^2},$$

$$\Theta(x, y, \tau) = \frac{\mathrm{T}(x, y, \tau)}{\mathrm{T_c}}, \quad \tau \geqslant 0, \quad -R_1 < x < +R_1, \quad -R_2 < y < +R_2, \tag{II.1}$$

$$-\frac{\partial\Theta(R_1, y, \tau)}{\partial x} + \frac{\sigma_{\text{в}}\mathrm{T_c^3}}{\lambda}\left[1 - \Theta^4(R_1, y, \tau)\right] = 0, \tag{II.2}$$

$$-\frac{\partial\Theta(x, R_2, \tau)}{\partial y} + \frac{\sigma_{\text{в}}\mathrm{T_c^3}}{\lambda}\left[1 - \Theta^4(x, R_2, \tau)\right] = 0, \tag{II.3}$$

$$\frac{\partial\Theta(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \tag{II.4}$$

$$\Theta(x, y, 0) = \Theta_0 = \mathrm{const}. \tag{II.5}$$

Покажем, что с достаточным приближением решение системы (II.1) — (II.5) может быть представлено в форме

$$\operatorname{Arth}\frac{\Theta(x, y, \tau) + \Theta_0}{1 + \Theta(x, y, \tau)\Theta_0} + \operatorname{arctg}\frac{\Theta(x, y, \tau) + \Theta_0}{1 - \Theta(x, y, \tau)\Theta_0} =$$

$$= \operatorname{Arth}\frac{\Theta(x, \tau) + \Theta(y, \tau)}{1 + \Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)} + \operatorname{arctg}\frac{\Theta(x, \tau) + \Theta(y, \tau)}{1 - \Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)}, \tag{II.6}$$

где $\Theta(x, \tau)$ и $\Theta(x, \tau)$ — известные решения для неограниченных пластин, взаимным пересечением которых образован брус прямоугольного сечения. При доказательстве принимаем во внимание идентичность условий однозначности для двух неограниченных пластин размерами $2R_1$ и $2R_2$ условиям однозначности для прямоугольной призмы (II.2) — (II.5). Непосредственной подстановкой выражения (II.6) в граничные и начальные условия для двух неограниченных пластин

$$-\frac{\dfrac{\partial\Theta(R_1, \tau)}{\partial x}}{1 - \Theta^4(R_1, \tau)} + \frac{\sigma_{\text{в}}\mathrm{T_c^3}}{\lambda} = 0,$$

$$-\frac{\dfrac{\partial\Theta(R_2, \tau)}{\partial y}}{1 - \Theta^4(R_2, \tau)} + \frac{\sigma_{\text{в}}\mathrm{T_c^3}}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial\Theta(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta(0, \tau)}{\partial y} = 0,$$

$$\Theta(x, 0) = \Theta(y, 0) = \Theta_0$$

убеждаемся, что соотношение (II.6) полностью удовлетворяет всем поставленным краевым условиям одномерных задач.

Подставим выражение (II.6) в дифференциальное уравнение теплопроводности (II.1). В результате имеем:

$$\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta(x, \tau)}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\Theta(x, \tau)}{\partial x^2}\right\} + \left\{\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta(y, \tau)}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\Theta(y, \tau)}{\partial y^2}\right\} -$$

$$-\frac{4\Theta^3(x, \tau)}{1 - \Theta^4(x, \tau)}\cdot\left(\frac{\partial\Theta(x, \tau)}{\partial x}\right)^2 - \frac{4\Theta^3(y, \tau)}{1 - \Theta^4(y, \tau)}\cdot\left(\frac{\partial\Theta(y, \tau)}{\partial y}\right)^2 \cong 0. \tag{II.7}$$

Нетрудно заметить, что выражения в фигурных скобках равны нулю. Тогда из (II.7) следует, что соотношение (II.6) не удовлетворяет уравнению (II.1). Однако, анализируя величину невязки

$$\Psi(x, y, \tau) = -\frac{4\Theta^3(x, \tau)}{1-\Theta^4(x, \tau)}\cdot\left(\frac{\partial\Theta(x, \tau)}{\partial x}\right)^2 - \frac{4\Theta^3(y, \tau)}{1-\Theta^4(y, \tau)}\cdot\left(\frac{\partial\Theta(y, \tau)}{\partial y}\right)^2,$$

можно отметить, что $\Psi(x, y, \tau) = 0$ при $x = y = 0$ (условие (II.4), значит для координаты центра решение (II.6) является точным, и $\Psi(x, y, \tau) \to 0$, когда $Sk \to 0$. Следовательно, до определенных значений критерия радиационного теплообмена величиной невязки можно пренебречь, тогда решение (II.6) с допустимым приближением удовлетворяет уравнению (II.1). Аналогично для короткого цилиндра и прямоугольного параллелепипеда решения записываются в виде:

$$\mathrm{Arth}\,\frac{\Theta(r, z, \tau)+\Theta_0}{1+\Theta(r, z, \tau)\Theta_0} + \mathrm{arctg}\,\frac{\Theta(r, z, \tau)+\Theta_0}{1-\Theta(r, z, \tau)\Theta_0} =$$

$$= \mathrm{Arth}\,\frac{\Theta(r, \tau)+\Theta(z, \tau)}{1+\Theta(r, \tau)\Theta(z, \tau)} + \mathrm{arctg}\,\frac{\Theta(r, \tau)+\Theta(z, \tau)}{1-\Theta(r, \tau)\Theta(z, \tau)}; \qquad \text{(II.8)}$$

$$\mathrm{Arth}\,\Theta(x, y, z, \tau) + \mathrm{arctg}\,\Theta(x, y, z, \tau) + 2(\mathrm{Arth}\,\Theta_0 + \mathrm{arctg}\,\Theta_0) =$$

$$= \mathrm{Arth}\,\frac{\Theta(x, \tau)+\Theta(y, \tau)+\Theta(z, \tau)+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}{1+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)+\Theta(x, \tau)\Theta(z, \tau)+\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)} +$$

$$+ \mathrm{arctg}\,\frac{\Theta(x, \tau)+\Theta(y, \tau)+\Theta(z, \tau)+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}{1+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)-\Theta(x, \tau)\Theta(z, \tau)-\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}, \qquad \text{(II.9}')$$

если $\dfrac{\Theta(x, \tau)\Theta(z, \tau)+\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}{1-\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)} < 1$;

$$\mathrm{Arth}\,\Theta(x, y, z, \tau) + \mathrm{arctg}\,\Theta(x, y, z, \tau) + 2(\mathrm{Arth}\,\Theta_0 + \mathrm{arctg}\,\Theta_0) =$$

$$= \mathrm{Arth}\,\frac{\Theta(x, \tau)+\Theta(y, \tau)+\Theta(z, \tau)+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}{1+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)-\Theta(x, \tau)\Theta(z, \tau)-\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)} +$$

$$+ \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{\Theta(x, \tau)+\Theta(y, \tau)+\Theta(z, \tau)+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}{1+\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)-\Theta(x, \tau)\Theta(z, \tau)-\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}, \qquad \text{(II.9}'')$$

если $\dfrac{\Theta(x, \tau)\Theta(z, \tau)+\Theta(y, \tau)\Theta(z, \tau)}{1-\Theta(x, \tau)\Theta(y, \tau)} > 1$.

Предложенный метод может быть с успехом применен в инженерной практике только при наличии достаточно эффективных способов решения одномерных задач теплопроводности с граничными условиями радиационного типа. Нами созданы инженерные номограммы по расчету температурного поля в телах классической формы при нагреве их лучистым теплом. Такие номограммы соответственно для неограниченной пластины и бесконечного цилиндра приведены в [6]. Точность номографического метода решения не выходит за пределы 2% в сторону занижения результатов расчета, включая и начальную стадию процесса, обычно определяемую наиболее грубо.

Примеры практического использования предложенного метода

Пример 1. Определить температуры в центре и в середине большой грани стального слитка размером $2R_x \times 2R_y \times 2R_z = 0{,}2 \times 0{,}4 \times 0{,}6$ *м*, который равномерно нагревается со всех сторон при температуре печи

1373°К в течение 0,5 и 1 часа. Начальная температура слитка 273°К, средний коэффициент теплопроводности $\lambda = 34{,}9 \frac{вт}{м.\,град.}$, температуропроводность $a = 0{,}03$ $м^2/час$, приведенный коэффициент лучеиспускания $\sigma_в = 4{,}65 \frac{вт}{м.^2 град^4}$.

Предварительно подсчитаем безразмерные комплексы

$Sк_x = 0{,}345$, $Sк_y = 1{,}035$, $Sк_z = 0{,}690$.

$Fo_x = 1{,}5$, $Fo_y = 0{,}167$, $Fo_z = 0{,}375$ ($\tau = 0{,}5$ часа).

$Fo_x = 3{,}0$ $Fo_y = 0{,}335$ $Fo_z = 0{,}75$ ($\tau = 1$ час).

По номограммам (рис. 1, 2, [6]) находим:

а) для первого случая ($\tau = 0{,}5$ часа)

$$\Theta_{x=0} = 0{,}605, \quad \Theta_{y=0} = 0{,}256, \quad \Theta_{z=0} = 0{,}348, \quad \Theta_{x=R_x} = 0{,}75.$$

б) для второго случая ($\tau = 1$ час)

$$\Theta_{x=0} = 0{,}895, \quad \Theta_{y=0} = 0{,}373, \quad \Theta_{z=0} = 0{,}562, \quad \Theta_{x=R_x} = 0{,}931.$$

Расчет по форме (II.9′) дает

а) $\Theta(0, 0, 0) = 0{,}752$ ($= 0{,}752$ $\delta = 0\%$)

$\Theta(R_x, 0{,}0) = 0{,}841$ ($= 0{,}854$ $\delta = 1{,}5\%$)

б) $\Theta(0, 0, 0) = 0{,}904$ ($= 0{,}961$ $\delta = 5{,}9\%$)

$\Theta(R_x, 0, 0) = 0{,}942$ ($= 0{,}985$ $\delta = 4{,}3\%$)

В скобках приведены расчетные данные работы [5] для этого случая и показана величина погрешности расчетов по двум различным методам.

Пример 2. Брус квадратного сечения подвержен симметричному радиационному нагреву. Безразмерные режимные параметры заданы величинами: $Sк_x = Sк_y = 1{,}05$; $\Theta_0 = 0{,}175$.

Каково значение относительных температур в центре, середине боковой грани и ребре бруса по истечении времени а) $Fo_1 = 0{,}245$, б) $Fo_2 = 0{,}815$?

Задача решается аналогично с помощью номограмм на рис. 1,2, [6]. В результате получаем:

а) $\Theta(0, 0, Fo_1) = 0{,}3796$ ($\delta = 0{,}8\%$) б) $\Theta(0{,}0, Fo_2) = 0{,}931$ ($\delta = 2\%$)

$\Theta(1{,}0, Fo_1) = 0{,}758$ ($\delta = 6{,}7\%$) $\Theta(1{,}0, Fo_2) = 0{,}978$ ($\delta = 0{,}8\%$)

$\Theta(1{,}1, Fo_1) = 0{,}937$ ($\delta = 7{,}1\%$) $\Theta(1{,}1, Fo_2) = 0{,}989$ ($\delta = 0{,}2\%$)

Сопоставим с данными расчетов на ЭВМ для этого случая

а) $\Theta(0{,}0, Fo_1) = 0{,}3767$ б) $\Theta(0{,}0, Fo_2) = 0{,}9133$

$\Theta(1{,}0, Fo_1) = 0{,}7096$ $\Theta(1{,}0, Fo_2) = 0{,}9701$

$\Theta(1{,}1, Fo_1) = 0{,}8748$ $\Theta(1{,}1, Fo_2) = 0{,}9887$.

В скобках приведена погрешность расчета в сравнении с данными ЭВМ.

Пример 3. Какова температура в центре и в середине боковой поверхности короткого стального цилиндра диаметром $2R = 0{,}3$ *м* и высотой $2H = 0{,}3$ *м*, симметрично нагреваемого в лучеиспускающей среде с температурой 1300°К в течение 1 часа. Начальная температура 293°К, теплофизические коэффициенты численно равны

$$\lambda = 34{,}9 \frac{вт}{м\, град}, \quad a = 0{,}0225 \; м^2/час,$$

$$\sigma_в = 4{,}24 \frac{вт}{м^2\, град^4}.$$

Вычислим: $Sk_R = Sk_н = 0{,}401$, $Fo_R = Fo_н = 1$. Используя номограммы на рис. 1, 2, 3, 4 [6] и формулу (II,8), получаем

$$\Theta(0,\ 0,\ Fo) = 0{,}913, \qquad \Theta(R,\ 0,\ Fo) = 0{,}959.$$

Сравним с данными зонального метода расчета [5], согласно которому

$$\Theta(0,\ 0,\ Fo) = 0{,}892, \qquad \Theta(R,\ 0,\ Fo) = 0{,}945.$$

погрешность расчета в сравнении с данными зонального метода составляет соответственно

$$\delta = 1{,}2\%, \quad \delta = 1{,}5\%.$$

Сопоставлением числовых данных, полученных по предлагаемому методу, с результатами расчетов на ЭВМ и зональным методом установлено, что максимальная погрешность расчета температуры в любой точке тела конечных размеров не будет превышать 5% в тех случаях, когда

$$Sk_{min} \leqslant 0{,}8, \text{ а в } 7\%, \text{ когда } Sk_{min} \leqslant 1{,}0.$$

Выводы

1. Предложены весьма эффективные методы расчета многомерной проблемы нелинейной теплопроводности.

2. Установленные закономерности (1.8), (1.14), (II.6), (II.8), (II.9) правомерны как в случае симметричного, так и в случае несимметричного нагрева. При этом может быть учтена несимметрия, обусловленная разными уровнями температур лучистого источника тепла на противоположных гранях тела конечных размеров, неодинаковостью приведенных степеней черноты поверхностей. Приведенные решения справедливы и в том случае, когда по всем координатным направлениям термические коэффициенты будут различны, т. е. когда тело конечных размеров является анизотропным.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Саломатов. Температурное поле в кристалле при нагреве радиацией. Изв. вузов—Физика, № 5, 1965.
2. В. В. Саломатов. Прогрев тел радиацией при переменной температуре источника тепла (кандидатская диссертация), Томск, 1964.
3. Л. А. Бровкин. Изв. вузов — Энергетика, № 3, № 4, 1965.
4. А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. Теория тепло- и массопереноса. ГЭИ, 1963.
5. Г. П. Бойков. Изв. ТПИ, т. 101, 1958.
6. В. В. Саломатов, А. А. Торлопов. Изв. вузов, «Черная металлургия». № 10, 1968.
7. В. В. Иванов, В. В. Саломатов. Изв. вузов, «Физика», № 6, 1966.