

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ КОЛЬЦЕВОГО ТЕПЛОЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА В УСЛОВИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА И ТЕМПЕРАТУРЫ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ ОТ ВРЕМЕНИ

Э. И. ГОНЧАРОВ, В. В. САЛОМАТОВ

(Представлена научным семинаром кафедры котлостроения и котельных установок)

Задача определения температурного поля кольцевого ТВЭЛа, внутреннее теплообразование которого является произвольной функцией времени, при его нестационарном охлаждении конвективными тепловыми потоками в условиях $Bi = Bi(Fo)$, $\Theta_c = \Theta(Fo)$ сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial x} \right] + Po(Fo) \quad (1)$$

$$-\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial x} = Bi_1(Fo) [\Theta(1, Fo) - \Theta_{c1}(Fo)] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial x} = Bi_2(Fo) [\Theta(x, Fo) - \Theta_{c2}(Fo)] \quad (3)$$

$$\Theta(x, 0) = \Theta_0 = \text{const} \quad (4)$$

$$\left[1 \leq x \leq x; 0 \leq Fo < \infty; \quad x = \frac{R_2}{R_1} \right]$$

Краевая задача (1) ÷ (4) в настоящее время не имеет точного аналитического решения из-за структурной сложности граничных условий (2), (3). Нами предлагается метод, применение которого дает возможность получить аналитически точные решения в стадии квазистационарного режима охлаждения. Начальная стадия процесса теплопереноса рассчитывается приближенно с помощью однопараметрического метода Кармана — Польгаузена из теории динамического пограничного слоя [1, 2].

Формальное представление о температурном поле кольцевого ТВЭЛа можно получить, сведя краевую задачу (1) ÷ (4) к функциональному уравнению. Применим к исходной системе уравнений конечное интегральное преобразование Ханкеля типа [3]

$$T(p, Fo) = \int_1^x \Theta(x, Fo) M(p, Fo) x dx, \quad (5)$$

где

$$M(p, Fo) = c \left[I_0(px) \frac{K_1(p)}{I_1(p)} + K_0(px) \right] \quad (6)$$

— ядро интегрального преобразования.

Решая преобразованную задачу и осуществляя переход от изображений функций к оригиналам, заменив модифицированные функции Бесселя обыкновенными, получим формальное решение в виде:

$$\begin{aligned} \Theta(x, Fo) = & \Theta_0 + \frac{2x^2}{x^2 - 1} \int_0^{Fo} \{Bi_1(\eta) [\Theta(1, \eta) - \Theta_{c1}(\eta)] - \\ & - x Bi_2(\eta) [\Theta(x, \eta) - \Theta_{c2}(\eta)] - Po(\eta)\} d\eta - \pi \times \\ & \times \sum_{\mu} \frac{\mu I_1^2(\mu) I_1^2(x\mu)}{I_1^2(\mu) - I_1^2(x\mu)} \left[I_0(\mu x) \frac{Y_1(\mu)}{I_1(\mu)} - Y_0(\mu x) \right] \times \\ & \times \left\{ \int_0^{Fo} \left[Bi_1(\eta) \frac{[\Theta(1, \eta) - \Theta_{c1}(\eta)]}{I_1(\mu)} - Bi_2(\eta) \frac{[\Theta(x, \eta) - \Theta_{c2}(\eta)]}{I_1(\mu x)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{Po(\eta)}{I_1(\mu)} \right] \exp(\mu^2 \eta) d\eta \right\} \exp(-\mu^2 Fo). \end{aligned} \quad (7)$$

Собственные числа задачи μ находятся из уравнения

$$I_1(\mu x) Y_1(\mu) = Y_1(\mu x) I_1(\mu). \quad (8)$$

Как следует из (7), температура в любой точке тепловыделяющего элемента может быть определена, если будут известны температуры на граничных поверхностях $\Theta(1, Fo)$ и $\Theta(x, Fo)$.

Полагая в уравнении (7) $x=1$ и $x=x$ и раскрывая последний интеграл по частям, можно получить следующую систему функциональных уравнений относительно $\Theta(1, Fo)$ и $\Theta(x, Fo)$:

$$\begin{aligned} \Theta(1, Fo) = & \Theta_0 + \frac{2x^2}{x^2 - 1} \int_0^{Fo} \{Bi_1(\eta) [\Theta(1, \eta) - \Theta_{c1}(\eta)] - \\ & - x Bi_2(\eta) [\Theta(x, \eta) - \Theta_{c2}(\eta)] - Po(\eta)\} d\eta - M_2(1) \times \\ & \times Bi_1(Fo) [\Theta(1, Fo) - \Theta_{c1}(Fo)] + M_1(1) Bi_2(Fo) [\Theta(x, Fo) - \\ & - \Theta_{c2}(Fo)] + \sum_{\mu} Z_1(\mu, 1, Fo, \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Theta(x, Fo) = & \Theta_0 + \frac{2x^2}{x^2 - 1} \int_0^{Fo} \{Bi_1(\eta) [\Theta(1, \eta) - \Theta_{c1}(\eta)] - \\ & - x Bi_2(\eta) [\Theta(x, \eta) - \Theta_{c2}(\eta)] - Po(\eta)\} d\eta - M_2(x) \times \\ & \times Bi_1(Fo) [\Theta(1, Fo) - \Theta_{c1}(Fo)] + M_1(x) Bi_2(Fo) [\Theta(x, Fo) - \\ & - \Theta_{c2}(Fo)] + \sum_{\mu} Z_2(\mu, x, Fo, \dots) \end{aligned} \quad (10)$$

Из [4]) известно, что по истечении некоторого времени $Fo > Fo^*$ температурное поле вступает в стадию упорядоченного режима. Физически это означает, что температурный градиент в любой точке полого цилиндра остается неизменным, а характер распределения температур по сечению становится квазиустановившимся.

С математических позиций это свидетельствует о незначительном влиянии последнего ряда на динамику температурного поля. С учетом указанных обстоятельств система интегральных уравнений (9), (10)

допускает замкнутое решение в стадии квазистационарного режима относительно $\Theta(1, Fo)$ и $\Theta(x, Fo)$ вида:

$$\Theta[(1; x), Fo] = \exp\left(-\int_0^{Fo} \frac{P(\eta)}{Q'(\eta)} d\eta\right) \left[\int_0^{Fo} G(\eta) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(\int_0^{\eta} \frac{P(\xi)}{(Q'\xi)} d\xi\right) d\eta + \Theta_0 \right] \quad (11)$$

Значения входящих в (11) величин следующие; для $X = 1$

$$P(Fo) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \left[x Bi_2(Fo) \frac{1 - N_2 Bi_1(Fo)}{1 - N_1 Bi_2(Fo)} - Bi_1(Fo) \right] \quad (12)$$

$$Q'(Fo) = 1 - M_1(1) Bi_2(Fo) \frac{1 - N_2 Bi_1(Fo)}{1 - N_1 Bi_2(Fo)} + M_2(x) Bi_1(Fo) \quad (13)$$

$$G(Fo) = - \left\{ \frac{2x^2}{x^2 - 1} Bi_1(Fo) \Theta_{c_1}(Fo) + Po(Fo) \right\} + M_2(1) Bi_2'(Fo) \times \\ \times \Theta_{c_1}'(Fo) - \frac{2x^3}{x^2 - 1} Bi_2(Fo) \frac{\Theta_{c_2}(Fo) - N_2 Bi_1(Fo) \Theta_{c_1}(Fo)}{1 - N_1 Bi_2(Fo)} - \\ - M_1(1) Bi_2'(Fo) \left\{ \frac{\Theta_{c_2}(Fo) - N_2 Bi_2(Fo) \Theta_{c_1}(Fo)}{1 - N_1 Bi_2(Fo)} \right\} \quad (14)$$

для $X = x$

$$P(Fo) = - \frac{2x^2}{x^2 - 1} \left[Bi_1(Fo) \frac{1 - N_1 Bi_2(Fo)}{1 - N_2 Bi_1(Fo)} - x Bi_2(Fo) \right] \quad (15)$$

$$Q'(Fo) = 1 + M_2(x) Bi_1(Fo) \frac{1 - N_1 Bi_2(Fo)}{1 - N_2 Bi_1(Fo)} - M_1(x) Bi_2(Fo) \quad (16)$$

$$G(Fo) = \frac{2x^3}{x^2 - 1} Bi_2(Fo) \Theta_{c_2}(Fo) + \frac{2x^2}{x^2 - 1} \left\{ Bi_1(Fo) \times \right. \\ \times \frac{\Theta_{c_1}(Fo) - N_1 Bi_2(Fo) \Theta_{c_2}(Fo)}{1 - N_2 Bi_1(Fo)} + Po(Fo) \left. \right\} - M_1(x) Bi_2'(Fo) \times \\ \times \Theta_{c_2}'(Fo) + M_2(x) Bi_1'(Fo) \left\{ \frac{\Theta_{c_1}(Fo) - N_1 Bi_2(Fo) \Theta_{c_2}(Fo)}{1 - N_2 Bi_1(Fo)} \right\} \quad (17)$$

Значения коэффициентов M_1 , M_2 , N_1 , N_2 приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов в уравнениях (12) ÷ (17)

$M_1(x)$	$\frac{x^3}{x^3 - 1} \left[\frac{1}{4} (x^2 - 2x^2) + \left(\ln x + \frac{x^4}{x^2 - 1} \ln \frac{1}{x} + \frac{3}{4} \right) \right]$
$M_2(x)$	$\frac{x^2}{x^2 - 1} \left[\frac{1}{4} (1 - 2x^2) + x^2 \left(\ln \frac{x}{x} + \frac{x^2}{x^2 - 1} \ln \frac{1}{x} + \frac{3}{4} \right) \right]$
N_1	$M_1(x) - M_1(1)$
N_2	$M_2(x) - M_2(1)$

По известным поверхностным температурам (соотношение (11)) можно теперь рассчитывать температурное поле в любом сечении кольцевого ТВЭЛа.

$$\begin{aligned} \Theta(x, Fo) = & \Theta_0 + \frac{2x^2}{x^2 - 1} \left\{ \int_0^{Fo} \{ Bi_1(\eta) [\Theta(1, \eta) - \Theta_{c_1}(\eta)] - \right. \\ & - x Bi_2(\eta) [\Theta(x, \eta) - \Theta_{c_2}(\eta)] - Po(\eta) \} d\eta - \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{x^2} x^2 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{x^2} \left(\ln x + \frac{x^2}{x^2 - 1} \ln \frac{1}{x} + \frac{3}{4} \right) \left. \right\} \{ Bi_1(Fo) [\Theta(1, Fo) - \Theta(Fo)] - \\ & - x Bi_2(Fo) [\Theta(x, Fo) - \Theta_{c_2}(Fo)] - Po(Fo) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Как частный случай из общего решения (18), полагая $R_1 \rightarrow 0$ и принимая соответствующее граничное условие $\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial x} = 0$, можно вывести расчетные зависимости, полученные нами ранее [5]. Полагая R_1 и $R_2 \rightarrow \infty$, задача сводится к несимметричному охлаждению плоского ТВЭЛа.

Для получения расчетных соотношений в начальной стадии воспользуемся приближенным интегральным методом Кармана — Польшауэна из теории пограничного слоя.

Введем по аналогии с толщиной динамического пограничного слоя толщину термического слоя ($\delta_1(Fo) = \xi_1(Fo) - 1$ для внутренней и $\delta_2(Fo) = x - \xi_2(Fo)$ для наружной частей несимметрично охлаждаемого ТВЭЛа).

В соответствии с принятой схемой решения граничные условия (2), (3) к дифференциальному уравнению (1), которое теперь для внутренней и наружной частей ТВЭЛа, как для полуограниченных областей, заменяется интегральными соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\int_1^{\xi_1} \Theta_1(x, Fo) dx - Q(Fo) \xi_1 \right] + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial x} - \frac{\partial \Theta(\xi_1, Fo)}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left[\int_{\xi_2}^x \Theta_2(x, Fo) dx - Q(Fo) \xi_2 \right] + \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial x} - \frac{\partial \Theta(\xi_2, Fo)}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

где
$$Q(Fo) = \int_0^{Fo} Po(\eta) d\eta,$$

несколько видоизменяются, а именно

$$\Theta_1(\xi_1, Fo) = Q(Fo), \quad \Theta_2(\xi_2, Fo) = Q(Fo) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi_1, Fo)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_2(\xi_2, Fo)}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

Будем аппроксимировать температурное поле в зоне теплового возмущения полиномом третьей степени от X

$$\begin{aligned} \Theta_1(x, Fo) - \Theta_0 = & C_1(Fo) + C_2(Fo)(\xi_1 - x) + C_3(Fo)(\xi_1 - x)^2 + \\ & + C_4(Fo)(\xi_1 - x)^3 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Theta_2(x, Fo) - \Theta_0 = D_1(Fo) + D_2(Fo)(x - \xi_2) + D_3(Fo)(x - \xi_2)^2 + D_4(Fo)(x - \xi_2)^3, \quad (24)$$

где $C_i(Fo)$, $D_i(Fo)$ — пока неизвестные функции безразмерного времени.

Для нахождения четырех коэффициентов кубической параболы три условия (4), (21), (22) уже имеется. Недостающее условие можно записать, исходя из [1], в виде:

$$\frac{\partial^2 \Theta_1(\xi_1, Fo)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta_2(\xi_2, Fo)}{\partial x^2} = 0. \quad (25)$$

Определяя неизвестные коэффициенты и интегрируя уравнения теплового баланса (19), (20), получим дифференциальные уравнения для определения толщин термических слоев

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Fo} \left\{ \frac{Bi_1(Fo) [\Theta_{c_1}(Fo) - Q(Fo)] \delta_1^2(Fo)}{3 + Bi_1(Fo) \delta_1(Fo)} \right\} = \\ = 12 \frac{Bi_1(Fo) [\Theta_{c_1}(Fo) - Q(Fo)]}{3 + Bi_1(Fo) \delta_1(Fo)} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Fo} \left\{ \frac{Bi_2(Fo) [\Theta_{c_2}(Fo) - Q(Fo)] \delta_2^2(Fo)}{3 + Bi_2(Fo) \delta_2(Fo)} \right\} = \\ = 12 \frac{Bi_2(Fo) [\Theta_{c_2}(Fo) - Q(Fo)]}{3 + Bi_2(Fo) \delta_2(Fo)} \end{aligned} \quad (27)$$

при условии $\delta_i(0) = 0$.

Отыскать общее решение полученных уравнений (26), (27) затруднительно, но для двух случаев решения сводятся к квадратурам
1) $Bi(Fo) \delta_i(Fo) \ll 3$

$$\delta_i = \left\{ \frac{12}{Bi_i [\Theta_{c_i} - Q]} \int_0^{Fo} Bi_i [\Theta_{c_i} - Q] d\eta \right\}^{1/2} \quad (28)$$

2) $Bi(Fo) \delta_i(Fo) \gg 3$

$$\delta_i = \left\{ \frac{24}{[\Theta_{c_i} - Q]^2} \int_0^{Fo} [\Theta_{c_i} - Q]^2 d\eta \right\}^{1/2}. \quad (29)$$

Расчет по полученным приближенным соотношениям можно проводить до тех пор, пока

$$\delta_1(Fo) + \delta_2(Fo) \leq x - 1. \quad (30)$$

Для оценки точности воспроизведения температурного поля сравнивалось точное решение для случая охлаждения полуограниченного тела в среде с $\alpha = \text{const}$, $\Theta_c = \text{const}$, $Ro = 0$ [6] с приближенным решением по предлагаемому методу. Как показало это сравнение, погрешность в определении температурного поля не превышает 7% и может быть снижена путем повышения степени аппроксимирующего полинома.

Для переходной зоны между начальным периодом охлаждения и квазиустановившейся стадией процесса решение можно приближенно получить путем разложения решения при $Fo = Fo^*$ или $Fo = Fo^{**}$ в ряд Тейлора.

Выводы

1. Решения (11), (18) являются аналитически точными для квазиустановившихся членов исследуемой задачи.

2. Инерционный период рассчитывается приближенно по соотношениям (23), (24), полученным методом Кармана — Польшаузена из теории пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Изд-во ИЛ, 1956.
 2. Т. Гудмен. Сб. «Проблемы теплообмена», Атомиздат, 1967.
 3. Е. П. Трофимов. ИФЖ, 1961, т. III, № 10.
 4. А. В. Лыков. Сб. «Затвердевание металлов», Машгиз, 1958.
 5. В. В. Саломатов, Э. И. Гончаров. Известия АН СССР, «Энергетика и транспорт», 1967, № 4.
 6. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1952.
-