ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

О КОНГРУЭНЦИЯХ ОКРУЖНОСТЕЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СДВОЕННЫМ СЕМЕЙСТВОМ КАНАЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

1. В статье [1] дана метрическая характеристика конгруэнций окружностей, обладающих одним или двумя семействами каналовых поверхностей.

В данной заметке рассматриваются конгруэнции {2.2} (конгруэнции окружностей, плоскости которых зависят от двух параметров), обладающие сдвоенным семейством каналовых поверхностей.

2. Замкнутая система дифференциальных уравнений конгруэнции {2.2} относительно канонического репера (см. [2]) записывается в виде:

$$
\begin{gathered}
\omega_i = \Lambda_{ij}\omega_3^i, \quad \omega_1^2 = b_j\omega_3^i, \\
da_0 = \Lambda_{0j}\omega_3^i, \quad \omega^3 = \Lambda_1\omega_3^1, \\
[d\Lambda_{01}\omega_3^1] + [d\Lambda_{02}\Lambda_3^2] = -\{b_1\Lambda_{01} + b_2\Lambda_{02}\}[\omega_3^1\omega_3^2], \qquad (1) \\
[db_1\omega_3^1] + [db_2\omega_2^2] = -\{b_1^2 + b_2^2 + 1\}[\omega_3^1\omega_3^2], \\
[d\Lambda_1\omega_3^1] = \{\Lambda_{21} - \Lambda_{12} - b_1\Lambda_1\}[\omega_3^1\omega_3^2], \\
[d\Lambda_{11}\omega_3^1] + [d\Lambda_{12}\omega_3^2] = \{b_1(\Lambda_{22} - \Lambda_{11}) - b_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{21})\}[\omega_3^1\omega_3^2], \\
[d\Lambda_{21}\omega_3^1] + [d\Lambda_{22}\omega_3^2] = \{-b_1(\Lambda_{21} + \Lambda_{21}) + b_2(\Lambda_{11} - \Lambda_{22}) - \Lambda_1\}[\omega_3^1\omega_3^2],
\end{gathered}
$$

где формы Пфаффа $\omega_i \equiv \omega^i$, ω_i^j, $i,j = 1,2$ удовлетворяют условиям кососимметричности и структурным уравнениям Картана ([3], стр. 137—138) трехмерного евклидова пространства E_3.

Каждое из координатных подмногообразий $\omega_3^i = 0$ является однопараметрическим семейством окружностей и характеризуется тем, что касательным вектором к сферическому изображению линейчатой поверхности, описываемой осями окружностей, является вектор $\bar{e}$ репера (здесь и в дальнейшем: j = i).

Обозначим через λ_{ir}, p_i, r_j соответственно абсциссу горловой точки, параметр распределения и косину распределения линейчатой поверхности, описываемой осями окружностей вдоль $\omega_3^i = 0$. Применяя соответствующие вычислительные формулы [4], получим:

$$
\lambda_{ir} = \Lambda_{jj}, \quad p_i = \Lambda_{ij}, \quad r_i = -b_j. \qquad (2)
$$

Для инвариантов λ_{0i} имеем следующую относительную характеристику: обращение в нуль каждого из инвариантов $\lambda_{0\,i}$ выделяет соответственно конгруэнции окружностей постоянного радиуса вдоль направлений $\omega_3^j = 0$.

3. Фокусы и фокальные направления конгруэнции осей определяются системой

$$
\begin{gathered}
(\rho-\Lambda_{11})\,\omega_3^1-\Lambda_{12}\omega_3^2=0,\\
-\Lambda_{21}\omega_3^1+(\rho-\Lambda_{22})\,\omega_3^2=0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где ρ — абсцисса фокуса луча конгруэнций.

Исключая из (3) отношение форм Пфаффа $\omega_3^1:\omega_3^2$, получим уравнение для определения координат фокусов этой конгруэнции:

$$
\rho^2-(\Lambda_{11}+\Lambda_{22})\,\rho+\Lambda_{11}\Lambda_{22}-\Lambda_{12}\Lambda_{21}=0. \tag{4}
$$

4. Непосредственно из теоремы Р. М. Гейдельмана, доказанной в [1], вытекает необходимое условие существования конгруэнций {2.2}, обладающих сдвоенным семейством каналовых поверхностей: если конгруэнция окружностей, принадлежащая двухпараметрическому семейству плоскостей, обладает сдвоенным семейством каналовых поверхностей, то конгруэнция ее осей является параболической.

Если конгруэнция осей $(\overline{A}\overline{e}_3)$ параболическая, то имеет место условие

$$
(\Lambda_{11}-\Lambda_{22})^2+4\Lambda_{12}\Lambda_{21}=0, \tag{5}
$$

а ее сдвоенный фокус совпадает с точкой

$$
\overline{F}=\overline{A}+\frac{\Lambda_{11}+\Lambda_{22}}{2}\,\overline{e}_3. \tag{6}
$$

Фокусу (6) соответствует фокальное направление

$$
\Omega\equiv 2\Lambda_{21}\omega_3^1-(\Lambda_{11}-\Lambda_{22})\,\omega_3^2=0. \tag{7}
$$

Сдвоенное семейство каналовых поверхностей конгруэнции {2.2}, если существует, огибает фокальную сферу с центром в точке (6), а его уравнением является уравнение (7). Аналитически это выражается в виде

$$
(\overline{M}-\overline{F},\,d\overline{M})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Omega), \tag{8}
$$

где $\overline{M}$ — радиус-вектор произвольной точки окружности конгруэнции, определяемый формулой

$$
\overline{M}=\overline{A}+R\,(\overline{e}\cos\varphi+\overline{e}_2\sin\varphi). \tag{9}
$$

Здесь φ — угол, образованный радиусом-вектором $\overline{AM}$ и осью $\overline{e}_1$.

Так как

$$
\begin{gathered}
d\overline{M}=(\omega^1+dR\cos\varphi-R\sin\varphi\,d\varphi-R\,\omega_1^2\sin\varphi)\,\overline{e}_1+\\
+(\omega^2+dR\sin\varphi+R\cos\varphi d\varphi+R\,\omega_1^2\cos\varphi)\,\overline{e}_2+\\
+(\omega^3+R\,\omega_1^3\cos\varphi+R\,\omega_2^3\sin\varphi)\,\overline{e}_3,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

то, в силу (8), будем иметь

$$
\begin{gathered}
R\cos\varphi\,(\omega^1+\rho\omega_3^1)+R\sin\varphi\,(\omega^2+\rho\omega_3^2)+\\
+RdR-\rho\omega^3\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Omega).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Учитывая (1), (5), (6) и (7), окончательно получим

$$
(\Lambda_{11}-\Lambda_{22})\,[2\Lambda_{01}+(\Lambda_{11}+\Lambda_{22})\,\Lambda_1]+4\Lambda_{02}\Lambda_{21}=0. \tag{12}
$$

Объединяя (5) и (12), получим два независимых условия, характеризующих конгруэнцию {2.2} со сдвоенным семейством каналовых поверхностей.

Анализ системы (1) с помощью критерия С. В. Бахвалова (например, [5], стр. 44) показывает, что произвол существования таких конгруэнций составляет 2 функции 2 аргументов.

5. Рассмотрим некоторые частные классы конгруэнций $\{2.2\}$, обладающих сдвоенным семейством каналовых поверхностей.

1) Потребуем, чтобы сдвоенное семейство каналовых поверхностей было огибающим фокальной сферы, центр которой совпадает с центром окружности конгруэнции. Из (6) имеем:

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{22} = 0. \tag{13}$$

Условия (5) и (12) принимают соответственно вид

$$\Lambda_{11}^2 + 4\Lambda_{12}\Lambda_{21} = 0 \tag{14}$$

и

$$V_{01}\Lambda_{11} + \Lambda_{02}\Lambda_{21} = 0. \tag{15}$$

Из (2) в силу (13) следует, что горловые точки линейчатых поверхностей, описываемых осями окружностей конгруэнции, вдоль $\omega^1{}_3 = 0$ и $\omega^2{}_3 = 0$ симметричны относительно центра фокальной сферы.

2) Потребуем, чтобы сдвоенное семейство каналовых поверхностей конгруэнции $\{2.2\}$ было семейством трубчатых поверхностей. Это означает, что конгруэнция $\{2.2\}$ должна быть конгруэнцией окружностей постоянного радиуса. Для таких конгруэнций

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0. \tag{16}$$

Анализ уравнений (5) и (12) показывает, что здесь возникают две возможности:

а) случай:

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} + \Lambda_{22} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (5) приводится к виду: $\Lambda_{11}{}^2 + \Lambda_{12}\,\Lambda_{21} = 0$. В этом случае центр фокальной сферы, огибаемой сдвоенным семейством трубчатых поверхностей конгруэнции $\{2.2\}$, совпадает с центром окружности.

б) случай:

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} = \Lambda_{22}. \tag{18}$$

Из (5) следует, что $\Lambda_{12}\Lambda_{21} = 0$. Следовательно, либо имеют место условия

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} = \Lambda_{22}, \quad \Lambda_{12} = 0, \tag{19}$$

либо — условия

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} = \Lambda_{22}, \quad \Lambda_{21} = 0. \tag{20}$$

Из (2) следует, что при выполнении каждого из условий (19) и (20) линейчатые поверхности, описываемые осями окружностей вдоль $\omega_3^1 = 0$ и $\omega_3^2 = 0$ соответственно, являются торсами с общим ребром возврата $\bar{s} = \bar{A}_{11} + \Lambda_{11}\bar{e}_3$.

Каждый из рассмотренных частных классов существует и определяется с произволом 1 функции 2 аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. М. Гейдельман. Метрическая характеристика конгруэнций окружностей, обладающих семействами каналовых поверхностей, У. М. Н., т. XII, вып. 4 (76), 1957.

2. М. Р. Вайнтруб. О конгруэнциях окружностей в евклидовом пространстве, Труды Томского университета, т. 191, сер. механико-математическая. 143—149, 1967.

3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана, М. — Л., 1948.

4. Р. Н. Щербаков. Построение метрической теории комплекса прямых при помощи репеража линейчатых подмногообразий. Труды Томского университета, т. 155, сер. математическая, 3—24, 1961.

5. Р. Н. Щербаков. Курс афинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск, 1960.