ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

О КОНГРУЭНЦИЯХ ОКРУЖНОСТЕЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СДВОЕННЫМ СЕМЕЙСТВОМ КАНАЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

1. В статье [1] дана метрическая характеристика конгруэнций окружностей, обладающих одним или двумя семействами каналовых поверхностей.

В данной заметке рассматриваются конгруэнции {2.2} (конгруэнции окружностей, плоскости которых зависят от двух параметров), обладающие сдвоенным семейством каналовых поверхностей.

2. Замкнутая система дифференциальных уравнений конгруэнции {2.2} относительно канонического репера (см. [2]) записывается в виде:

$$
\begin{gathered}
\omega_i = \Lambda_{ij}\omega_3^i, \quad \omega_1^2 = b_j\omega_3^i, \\
da_0 = \Lambda_{0j}\omega_3^i, \quad \omega^3 = \Lambda_1\omega_3^1, \\
[d\Lambda_{01}\omega_3^1] + [d\Lambda_{02}\Lambda_3^2] = -\{b_1\Lambda_{01} + b_2\Lambda_{02}\}[\omega_3^1\omega_3^2], \qquad (1) \\
[db_1\omega_3^1] + [db_2\omega_2^2] = -\{b_1^2 + b_2^2 + 1\}[\omega_3^1\omega_3^2], \\
[d\Lambda_1\omega_3^1] = \{\Lambda_{21} - \Lambda_{12} - b_1\Lambda_1\}[\omega_3^1\omega_3^2], \\
[d\Lambda_{11}\omega_3^1] + [d\Lambda_{12}\omega_3^2] = \{b_1(\Lambda_{22} - \Lambda_{11}) - b_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{21})\}[\omega_3^1\omega_3^2], \\
[d\Lambda_{21}\omega_3^1] + [d\Lambda_{22}\omega_3^2] = \{-b_1(\Lambda_{21} + \Lambda_{21}) + b_2(\Lambda_{11} - \Lambda_{22}) - \Lambda_1\}[\omega_3^1\omega_3^2],
\end{gathered}
$$

где формы Пфаффа $\omega_i \equiv \omega^i$, ω_i^j, $i,j = 1,2$ удовлетворяют условиям кососимметричности и структурным уравнениям Картана ([3], стр. 137—138) трехмерного евклидова пространства E_3.

Каждое из координатных подмногообразий $\omega_3^i = 0$ является однопараметрическим семейством окружностей и характеризуется тем, что касательным вектором к сферическому изображению линейчатой поверхности, описываемой осями окружностей, является вектор $\bar{e}$ репера (здесь и в дальнейшем: j = i).

Обозначим через λ_{ir}, p_i, r_j соответственно абсциссу горловой точки, параметр распределения и косину распределения линейчатой поверхности, описываемой осями окружностей вдоль $\omega_3^j = 0$. Применяя соответствующие вычислительные формулы [4], получим:

$$
\lambda_{ir} = \Lambda_{jj}, \quad p_i = \Lambda_{ij}, \quad r_i = -b_j. \qquad (2)
$$

Для инвариантов λ_{0i} имеем следующую относительную характеристику: обращение в нуль каждого из инвариантов λ_{0i} выделяет соответственно конгруэнции окружностей постоянного радиуса вдоль направлений $\omega_3^j = 0$.

3. Фокусы и фокальные направления конгруэнции осей определяются системой

$$(\rho-\Lambda_{11})\,\omega_3^1-\Lambda_{12}\omega_3^2=0,$$
$$-\Lambda_{21}\omega_3^1+(\rho-\Lambda_{22})\,\omega_3^2=0, \tag{3}$$

где ρ — абсцисса фокуса луча конгруэнций.

Исключая из (3) отношение форм Пфаффа $\omega_3^1:\omega_3^2$, получим уравнение для определения координат фокусов этой конгруэнции:

$$\rho^2-(\Lambda_{11}+\Lambda_{22})\,\rho+\Lambda_{11}\Lambda_{22}-\Lambda_{12}\Lambda_{21}=0. \tag{4}$$

4. Непосредственно из теоремы Р. М. Гейдельмана, доказанной в [1], вытекает необходимое условие существования конгруэнций $\{2.2\}$, обладающих сдвоенным семейством каналовых поверхностей: если конгруэнция окружностей, принадлежащая двухпараметрическому семейству плоскостей, обладает сдвоенным семейством каналовых поверхностей, то конгруэнция ее осей является параболической.

Если конгруэнция осей $(\bar{A}\bar{e}_3)$ параболическая, то имеет место условие

$$(\Lambda_{11}-\Lambda_{22})^2+4\Lambda_{12}\Lambda_{21}=0, \tag{5}$$

а ее сдвоенный фокус совпадает с точкой

$$\bar{F}=\bar{A}+\frac{\Lambda_{11}+\Lambda_{22}}{2}\,\bar{e}_3. \tag{6}$$

Фокусу (6) соответствует фокальное направление

$$\Omega\equiv 2\Lambda_{21}\omega_3^1-(\Lambda_{11}-\Lambda_{22})\,\omega_3^2=0. \tag{7}$$

Сдвоенное семейство каналовых поверхностей конгруэнции $\{2.2\}$, если существует, огибает фокальную сферу с центром в точке (6), а его уравнением является уравнение (7). Аналитически это выражается в виде

$$(\bar{M}-\bar{F},\ d\bar{M})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Omega), \tag{8}$$

где $\bar{M}$ — радиус-вектор произвольной точки окружности конгруэнции, определяемый формулой

$$\bar{M}=\bar{A}+R\,(\bar{e}\cos\varphi+\bar{e}_2\sin\varphi). \tag{9}$$

Здесь φ — угол, образованный радиусом-вектором $\overline{AM}$ и осью $\bar{e}_1$.

Так как

$$\begin{aligned} d\bar{M}&=(\omega^1+dR\cos\varphi-R\sin\varphi\,d\varphi-R\,\omega_1^2\sin\varphi)\,\bar{e}_1+\\ &+(\omega^2+dR\sin\varphi+R\cos\varphi\,d\varphi+R\,\omega_1^2\cos\varphi)\,\bar{e}_2+\\ &+(\omega^3+R\,\omega_1^3\cos\varphi+R\,\omega_2^3\sin\varphi)\,\bar{e}_3, \end{aligned} \tag{10}$$

то, в силу (8), будем иметь

$$\begin{aligned} &R\cos\varphi\,(\omega^1+\rho\omega_3^1)+R\sin\varphi\,(\omega^2+\rho\omega_3^2)+\\ &+RdR-\rho\omega^3\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Omega). \end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая (1), (5), (6) и (7), окончательно получим

$$(\Lambda_{11}-\Lambda_{22})\,[2\Lambda_{01}+(\Lambda_{11}+\Lambda_{22})\,\Lambda_1]+4\Lambda_{02}\Lambda_{21}=0. \tag{12}$$

Объединяя (5) и (12), получим два независимых условия, характеризующих конгруэнцию $\{2.2\}$ со сдвоенным семейством каналовых поверхностей.

Анализ системы (1) с помощью критерия С. В. Бахвалова (например, [5], стр. 44) показывает, что произвол существования таких конгруэнций составляет 2 функции 2 аргументов.

5. Рассмотрим некоторые частные классы конгруэнций {2.2}, обладающих сдвоенным семейством каналовых поверхностей.

1) Потребуем, чтобы сдвоенное семейство каналовых поверхностей было огибающим фокальной сферы, центр которой совпадает с центром окружности конгруэнции. Из (6) имеем:

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{22} = 0. \tag{13}$$

Условия (5) и (12) принимают соответственно вид

$$\Lambda_{11}^2 + 4\Lambda_{12}\Lambda_{21} = 0 \tag{14}$$

и

$$V_{01}\Lambda_{11} + \Lambda_{02}\Lambda_{21} = 0. \tag{15}$$

Из (2) в силу (13) следует, что горловые точки линейчатых поверхностей, описываемых осями окружностей конгруэнции, вдоль $\omega^1{}_3 = 0$ и $\omega^2{}_3 = 0$ симметричны относительно центра фокальной сферы.

2) Потребуем, чтобы сдвоенное семейство каналовых поверхностей конгруэнции {2.2} было семейством трубчатых поверхностей. Это означает, что конгруэнция {2.2} должна быть конгруэнцией окружностей постоянного радиуса. Для таких конгруэнций

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0. \tag{16}$$

Анализ уравнений (5) и (12) показывает, что здесь возникают две возможности:

а) случай:

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} + \Lambda_{22} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (5) приводится к виду: $\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}\,\Lambda_{21} = 0$. В этом случае центр фокальной сферы, огибаемой сдвоенным семейством трубчатых поверхностей конгруэнции {2.2}, совпадает с центром окружности.

б) случай:

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} = \Lambda_{22}. \tag{18}$$

Из (5) следует, что $\Lambda_{12}\Lambda_{21} = 0$. Следовательно, либо имеют место условия

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} = \Lambda_{22}, \quad \Lambda_{12} = 0, \tag{19}$$

либо — условия

$$\Lambda_{01} = \Lambda_{02} = 0, \quad \Lambda_{11} = \Lambda_{22}, \quad \Lambda_{21} = 0. \tag{20}$$

Из (2) следует, что при выполнении каждого из условий (19) и (20) линейчатые поверхности, описываемые осями окружностей вдоль $\omega_3^1 = 0$ и $\omega_3^2 = 0$ соответственно, являются торсами с общим ребром возврата $\bar{s} = \bar{A}_{11} + \Lambda_{11}\bar{e}_3$.

Каждый из рассмотренных частных классов существует и определяется с произволом 1 функции 2 аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. М. Гейдельман. Метрическая характеристика конгруэнций окружностей, обладающих семействами каналовых поверхностей, У. М. Н., т. XII, вып. 4 (76), 1957.
2. М. Р. Вайнтруб. О конгруэнциях окружностей в евклидовом пространстве, Труды Томского университета, т. 191, сер. механико-математическая. 143—149, 1967.
3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948.
4. Р. Н. Щербаков. Построение метрической теории комплекса прямых при помощи репеража линейчатых подмногообразий. Труды Томского университета, т. 155, сер. математическая, 3—24, 1961.
5. Р. Н. Щербаков. Курс афинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск, 1960.