

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАСТИНКИ

Т. А. ЛУКОВСКАЯ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

Решение симметричной задачи для бесконечно тонкой немагнитной пластинки было получено Ю. К. Федосенко [1] в 1965 г. Впервые задача была поставлена Штейдингером [2], затем рассматривалась А. Б. Сапожниковым [3], но решений, пригодных для вычислений, не было получено.

Мы будем рассматривать ферромагнитную пластинку, поперечное сечение которой образует область $\left(-\frac{\delta}{2} \leq z \leq +\frac{\delta}{2}\right)$ с магнитной проницаемостью μ , проводимостью σ , движущуюся с постоянной скоростью v в положительном направлении оси ОХ.

Рассмотрим следующие три случая.

§ 1. Металлическая пластинка движется в постоянном поле двух одноименных полюсов, расположенных на расстоянии h по обе стороны от поверхности пластинки, рис. 1. Обозначим через $u = A_y$ составляющую вектор потенциала A по оси ОУ в области $-\frac{\delta}{2} < z < \frac{\delta}{2}$, u_0^+ —

составляющую первичного поля в области $z > \frac{\delta}{2}$. u_0^- — составляющую

первичного поля в области $z < -\frac{\delta}{2}$. Составляющую вторичного поля обозначим:

$$u^+ \text{ — в области } z > \frac{\delta}{2},$$

$$u^- \text{ — в области } z < -\frac{\delta}{2}.$$

В случае линейного магнита:

$$u_0^+ = m \int_0^\infty e^{-\left|h + \frac{\delta}{2} - z\right| \alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha;$$

$$u_0^- = m \int_0^\infty e^{-\left|h + \frac{\delta}{2} + z\right| \alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

В главе 22 [3] показано, что задача сводится к решению уравнений:

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^2} = 0 \quad z > \frac{\delta}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad -\frac{\delta}{2} < z < \frac{\delta}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^-}{\partial z^2} = 0 \quad z < -\frac{\delta}{2}, \quad (3)$$

где $\omega = 4\pi\sigma\mu v \cdot 10^{-9}$.

Допустим, что внешняя среда по отношению к пластинке — воздух ($\mu_0 = 1$).

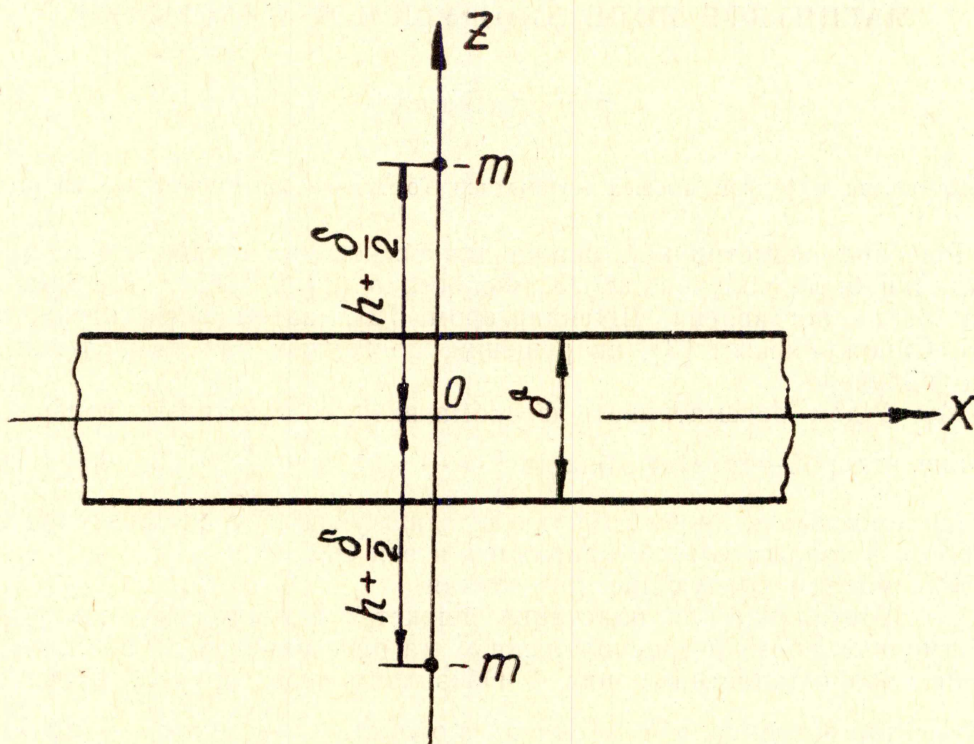


Рис. 1

На границах смежных сред имеют место условия:

$$u\left(x, \frac{\delta}{2}\right) = u^+\left(x, \frac{\delta}{2}\right) + u_0^+\left(x, \frac{\delta}{2}\right);$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial z}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\partial u^+}{\partial z}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\partial u_0^+}{\partial z}\left(x, \frac{\delta}{2}\right), \quad (4)$$

$$u\left(x, -\frac{\delta}{2}\right) = u^-\left(x, -\frac{\delta}{2}\right) + u_0^-\left(x, -\frac{\delta}{2}\right);$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial z}\left(x, -\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\partial u^-}{\partial z}\left(x, -\frac{\delta}{2}\right) + \frac{\partial u_0^-}{\partial z}\left(x, -\frac{\delta}{2}\right). \quad (5)$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде интегралов Фурье;

$$u^+(x, z) = \int_0^{\infty} [A^+(\alpha, z) \cos \alpha x + B^+(\alpha, z) \sin \alpha x] d\alpha, \quad z > \frac{\delta}{2} \quad (6)$$

$$u(x, z) = \int_0^{\infty} [A(\alpha, z) \cos \alpha x + B(\alpha, z) \sin \alpha x] d\alpha, \quad -\frac{\delta}{2} < z < \frac{\delta}{2} \quad (7)$$

$$u^-(x, z) = \int_0^{\infty} [A^-(\alpha, z) \cos \alpha x + B^-(\alpha, z) \sin \alpha x] d\alpha, \quad z < -\frac{\delta}{2}. \quad (8)$$

Подставляя интегралы в уравнения (1) — (3) и используя единственность представления интегралом Фурье (см. [4]) получаем уравнения:

$$\frac{d^2 A^+}{dz^2} - \alpha^2 A^+ = 0, \quad \frac{d^2 B^+}{dz^2} - \alpha^2 B^+ = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 A^-}{dz^2} - \alpha^2 A^- = 0, \quad \frac{d^2 B^-}{dz^2} - \alpha^2 B^- = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - \alpha^2 A - \alpha \omega B = 0, \quad \frac{d^2 B}{dz^2} - \alpha^2 B + \alpha \omega A = 0. \quad (11)$$

Частными решениями уравнений (9) и (10) являются выражения $\exp(+\alpha z)$ и $\exp(-\alpha z)$, но для верхней среды $z > \frac{\delta}{2}$ только второе дает ограниченное решение, а для нижней $z < -\frac{\delta}{2}$ — только первое, так что будем иметь:

$$A^+(\alpha, z) = c_1^+(\alpha) e^{-\alpha z}, \quad B^+(\alpha, z) = c_2^+(\alpha) e^{-\alpha z}, \quad (12)$$

$$A^-(\alpha, z) = c_1^-(\alpha) e^{\alpha z}, \quad B^-(\alpha, z) = c_2^-(\alpha) e^{\alpha z}. \quad (13)$$

Система (11) приводится к уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4 A}{dz^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 A}{dz^2} + \alpha^2 (\omega^2 + \alpha^2) A = 0. \quad (14)$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$A(\alpha, z) = c_1 e^{\kappa_1 z} + c_2 e^{\kappa_2 z} + c_3 e^{-\kappa_1 z} + c_4 e^{-\kappa_2 z}, \quad (15)$$

где

$$K_{1,2} = a \pm bi, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + \alpha^4}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}}}, \quad b = \frac{\alpha \omega}{2a} \quad (16)$$

или

$$A(\alpha, z) = e^{\alpha z} (C_1 \cos bz + C_2 \sin bz) + e^{-\alpha z} (C_3 \cos bz + C_4 \sin bz), \quad (17)$$

если положим $c_1 + c_2 = C_1$, $c_3 + c_4 = C_3$, $i(c_1 - c_2) = C_2$, $i(c_4 - c_3) = C_4$.
Из системы (11) имеем:

$$B(\alpha, z) = \frac{1}{\alpha \omega} \left(\frac{d^2 A}{dz^2} - \alpha^2 A \right).$$

И, подставляя значение $A(\alpha, z)$, получим:

$$B(\alpha, z) = i(c_1 e^{\kappa_1 z} - c_2 e^{\kappa_2 z} + c_3 e^{-\kappa_1 z} - c_4 e^{-\kappa_2 z})$$

или

$$B(\alpha, z) = e^{az} (C_2 \cos bz - C_1 \sin bz) + e^{-az} (C_3 \sin bz - C_4 \cos bz). \quad (18)$$

Подчиняя решения (6) — (8) краевым условиям (4) — (5), получим систему восьми уравнений для неизвестных c_1^+ , c_2^+ , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_1^- , c_2^-

$$\begin{aligned} c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} &= c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}, \\ c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} &= c_1^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}, \\ \left[\kappa_1 (c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) + \kappa_2 (c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) \right] &= -\mu \alpha c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}, \\ \left[\kappa_1 (c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) + \kappa_2 (c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) \right] &= \mu \alpha c_1^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}, \\ i (c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) &= c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + \frac{m}{\alpha} e^{-ah}, \\ i (c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) &= c_2^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + \frac{m}{\alpha} e^{-ah}, \\ i \kappa_1 (c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) - i \kappa_2 (c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) &= -\mu \alpha c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + m \mu e^{-ah}, \\ i \kappa_1 (c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) - i \kappa_2 (c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) &= \mu \alpha c_2^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} - m \mu e^{-ah}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из этой системы следует, что $c_3 = c_1$, $c_4 = c_2$, $c_1^- = c_1^+$, $c_2^- = c_2^+$. Тогда и $C_3 = C_1$, а $C_4 = -C_2$. И из (17) и (18) будем иметь:

$$A(\alpha, z) = e^{az} (C_1 \cos bz + C_2 \sin bz) + e^{-az} (C_1 \cos bz - C_2 \sin bz),$$

или

$$A(\alpha, z) = 2C_1 \cos bz \operatorname{ch} az + 2C_2 \sin bz \operatorname{sh} az,$$

$$B(\alpha, z) = e^{az} (C_2 \cos bz - C_1 \sin bz) + e^{-az} (C_2 \cos bz + C_1 \sin bz)$$

или

$$B(\alpha, z) = 2C_2 \cos bz \operatorname{ch} az - 2C_1 \sin bz \operatorname{sh} az.$$

Теперь вместо системы (19) будем иметь систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными c_1^+ , C_1 , C_2 , c_2^+ .

$$\begin{aligned} 2C_1 \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + 2C_2 \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} &= c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}, \\ 2C_1 \left(a \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} - b \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} \right) + \\ + 2C_2 \left(a \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + b \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} \right) &= -\alpha \mu c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}, \\ -2C_1 \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} + 2C_2 \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} &= c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + \frac{m}{\alpha} e^{-ah}, \\ -2C_1 \left(a \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + b \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} \right) + \\ + 2C_2 \left(a \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} - b \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} \right) &= -\alpha \mu c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + m \mu e^{-ah}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решая систему (20), получим:

$$c_1 = -\frac{m\mu p}{p^2 + q^2} e^{-\alpha h}, \quad c_2 = \frac{m\mu q}{p^2 + q^2} e^{-\alpha h},$$

$$c_1^+ = -\frac{m\mu}{p^2 + q^2} (a \sin b\delta + b \operatorname{sh} a\delta) e^{-\alpha \left(h - \frac{\delta}{2}\right)},$$

$$c_2^+ = \frac{m\mu}{p^2 + q^2} \left[a \operatorname{sh} a\delta - b \sin b\delta + 2\alpha\mu \left(\sin^2 \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{a\delta}{2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \cos^2 \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{a\delta}{2} \right) \right] e^{-\alpha \left(h - \frac{\delta}{2}\right)} - \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha \left(h - \frac{\delta}{2}\right)},$$

где

$$p = \alpha\mu \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} + a \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + b \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2}$$

$$q = \alpha\mu \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + a \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} - b \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2}. \quad (21)$$

Таким образом, при найденных значениях C_1 , C_2 , c_1^+ и c_2^+ решение выразится в виде интегралов:

$$u^+(x, z) = \int_0^\infty [c_1^+(\alpha) \cos \alpha x + c_2^+(\alpha) \sin \alpha x] e^{-\alpha z} d\alpha$$

$$u^-(x, z) = \int_0^\infty [c_1^+(\alpha) \cos \alpha x + c_2^+(\alpha) \sin \alpha x] e^{+\alpha z} d\alpha, \quad u^-(x, -z) = u^+(x, z),$$

$$u(x, z) = 2 \int_0^\infty [(C_1(\alpha) \cos bz \operatorname{ch} az + C_2(\alpha) \sin bz \operatorname{sh} az) \cos \alpha x +$$

$$+ (C_2(\alpha) \cos bz \operatorname{ch} az - C_1(\alpha) \sin bz \operatorname{sh} az) \sin \alpha x] d\alpha.$$

Замечаем, что поле симметрично относительно плоскости XOY.

§ 2. Пластика движется в поле разноименных полюсов, расположенных, как в первом случае. Первичное поле будет иметь вид

$$u_0^+ = m \int_0^\infty e^{-\left|h + \frac{\delta}{2} - z\right|\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha; \quad u_0^- = -m \int_0^\infty e^{-\left|h + \frac{\delta}{2} + z\right|\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

Задача сводится к решению уравнений (1) — (3) с краевыми условиями (4) — (5).

Как и прежде, решение задачи ищем в виде интегралов Фурье, используя единственность представления этого решения интегралом Фурье. При этом получаем

$$c_3 = -c_1, \quad c_4 = -c_2, \quad c_1^- = -c_1^+, \quad c_2^- = -c_2^+ \quad \text{и} \quad C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2.$$

В этом случае решение выразится в виде интегралов:

$$u^+(x, z) = \int_0^\infty [c_1^+(\alpha) \cos \alpha x + c_2^+(\alpha) \sin \alpha x] e^{-\alpha z} d\alpha,$$

$$u^-(x, z) = - \int_0^\infty [c_1^+(\alpha) \cos \alpha x + c_2^+(\alpha) \sin \alpha x] e^{+\alpha z} d\alpha,$$

$$u(x, z) = 2 \int_0^\infty \{ [C_1(\alpha) \cos bz \operatorname{sh} az + C_2(\alpha) \sin bz \operatorname{ch} az] \cos \alpha x +$$

$$+ [C_2(\alpha) \cos bz \operatorname{sh} az - C_1(\alpha) \sin bz \operatorname{ch} az] \sin \alpha x \} d\alpha,$$

где

$$C_1(\alpha) = -\frac{m\mu p_1}{p_1^2 + q_1^2} e^{-\alpha h}; \quad C_2(\alpha) = \frac{m\mu q_1}{p_1^2 + q_1^2} e^{-\alpha h};$$

$$c_1^+(\alpha) = \frac{m\mu}{p_1^2 + q_1^2} (a \sin b\delta - b \operatorname{sh} a\delta) e^{-\alpha \left(h - \frac{\delta}{2}\right)},$$

$$c_2^+(\alpha) = \frac{m\mu}{p_1^2 + q_1^2} \left[a \operatorname{sh} a\delta + b \sin b\delta + \right. \\ \left. + 2\alpha\mu \left(\sin^2 \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{a\delta}{2} + \cos^2 \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{a\delta}{2} \right) \right] e^{-\alpha \left(h - \frac{\delta}{2}\right)} - \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha \left(h - \frac{\delta}{2}\right)},$$

$$p_1 = \alpha\mu \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + a \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} + b \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2},$$

$$q_1 = \alpha\mu \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} + a \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} - b \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2}.$$

§ 3. Пластика движется в поле четырех магнитных полюсов расположенных как показано на рис. 2.

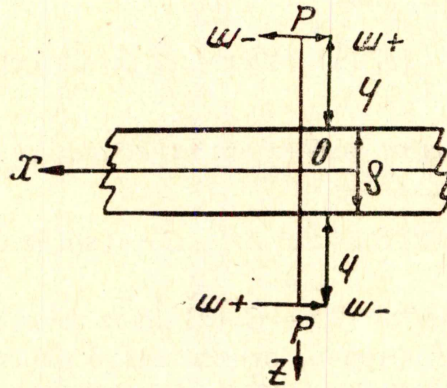


Рис. 2

Оставляя прежние обозначения, будем иметь:

$$u_0^+ = m \int_0^\infty e^{-\left|h + \frac{\delta}{2} - z\right|\alpha} [\sin(x+d)\alpha - \sin(x-d)\alpha] \frac{d\alpha}{\alpha}$$

или

$$u_0^+ = 2m \int_0^\infty e^{-\left|h + \frac{\delta}{2} - z\right|\alpha} \cos xz \sin d\alpha \frac{d\alpha}{\alpha};$$

$$u_0^- = 2m \int_0^\infty e^{-\left|h + \frac{\delta}{2} + z\right|\alpha} \cos xz \sin d\alpha \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Как и в предыдущих случаях, задача сводится к решению уравнений (1) — (3). На границах смежных сред имеют место условия (4) — (5). Решение задачи будем искать в виде интегралов Фурье (6) — (8). Подчиняя решение (6) — (8) краевым условиям (4) — (5), получим систему восьми уравнений

$$c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} = c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + \frac{2m}{\alpha} \sin \alpha d \cdot e^{-\alpha h},$$

$$c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} + c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} = c_1^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + \frac{2m}{\alpha} \sin \alpha d \cdot e^{-\alpha h}, \quad (22)$$

$$\kappa_1 (c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) + \kappa_2 (c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) = -\alpha \mu c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + 2m \mu \sin \alpha d \cdot e^{-\alpha h}.$$

$$\kappa_1 (c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) + \kappa_2 (c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) = \alpha \mu c_1^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} - 2m \mu \sin \alpha d \cdot e^{-\alpha h}.$$

$$i (c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) = c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}.$$

$$i (c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} + c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) = c_2^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}.$$

$$i \kappa_1 (c_1 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) - i \kappa_2 (c_2 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) = -\alpha \mu c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}.$$

$$i \kappa_1 (c_1 e^{-\frac{\kappa_1 \delta}{2}} - c_3 e^{\frac{\kappa_1 \delta}{2}}) - i \kappa_2 (c_2 e^{-\frac{\kappa_2 \delta}{2}} - c_4 e^{\frac{\kappa_2 \delta}{2}}) = \alpha \mu c_2^- e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}.$$

Отсюда

$$c_3 = c_1, \quad c_4 = c_2, \quad c_1^- = c_1^+, \quad c_2^- = c_2^+$$

и

$$C_3 = C_1, \quad C_4 = -C_2.$$

И вместо системы (21) будем иметь систему четырех уравнений с неизвестными $c_1^+(\alpha)$, $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$, $c_2^+(\alpha)$:

$$\begin{aligned} 2C_1 \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + 2C_2 \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} &= c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + \frac{2m}{\alpha} \sin \alpha d \cdot e^{-\alpha h}, \\ 2C_1 \left(a \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} b \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} \right) + 2C_2 \left(a \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + b \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} \right) &= \\ &= -\alpha \mu c_1^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}} + 2m \mu \sin \alpha d \cdot e^{-\alpha h}, \\ -2C_1 \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} + 2C_2 \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} &= c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}, \\ -2C_1 \left(a \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} + b \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} \right) + \\ + 2C_2 \left(a \cos \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh} \frac{a\delta}{2} - b \sin \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch} \frac{a\delta}{2} \right) &= -\alpha \mu c_2^+ e^{-\frac{\alpha \delta}{2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Решая систему (23), получим

$$C_1(\alpha) = \frac{2m \mu \sin \alpha d}{p^2 + q^2} \cdot q e^{-\alpha h}, \quad C_2(\alpha) = \frac{2m \mu \sin \alpha d}{p^2 + q^2} \cdot p e^{-\alpha h},$$

$$\begin{aligned} c_1^+(\alpha) &= \frac{2m \mu \sin \alpha d}{p^2 + q^2} \left[2\alpha \mu \left(\sin^2 \frac{b\delta}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{a\delta}{2} + \cos^2 \frac{b\delta}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{a\delta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + a \operatorname{sh} a\delta - b \sin b\delta - \frac{p^2 + q^2}{\alpha \mu} \right] e^{-\left(h - \frac{\delta}{2}\right)\alpha}, \end{aligned}$$

$$c_2^+(\alpha) = \frac{2m \mu \sin \alpha d}{p^2 + q^2} (a \sin b\delta + b \operatorname{sh} a\delta) e^{-\alpha \left(h - \frac{\delta}{2}\right)},$$

где q и p определяются по формулам (21). Тогда решение выразится в виде интегралов:

$$u^+(x, z) = \int_0^{\infty} [c_1^+(\alpha) \cos \alpha x + c_2^+(\alpha) \sin \alpha x] e^{-\alpha z} d\alpha,$$

$$u^-(x, z) = \int_0^{\infty} [c_1^+(\alpha) \cos \alpha x + c_2^+(\alpha) \sin \alpha x] e^{\alpha z} d\alpha,$$

$$u(x, z) = 2 \int_0^{\infty} \{ [C_1(\alpha) \cos bz \operatorname{ch} az + C_2(\alpha) \sin bz \operatorname{sh} az] \cos \alpha x + \\ + [C_2(\alpha) \cos bz \operatorname{ch} az - C_1(\alpha) \sin bz \operatorname{sh} az] \sin \alpha x \} d\alpha.$$

Заметим, что мы можем решить задачу, как только нам задано первичное поле в виде интеграла Фурье. В частности, легко получить решение для случая, когда задано первичное поле линейных токов.

Для численного анализа задачи лучше всего, пользуясь зависимостью $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, записать выражения для H_x и H_z

$$\mu H_x = -\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \mu H_z = \frac{\partial u}{\partial x}$$

и затем уже вычислять значения их на ЭВМ в различных точках при различных значениях параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Федосенко. «Дефектоскопия», № 4, 1965, стр. 8.
2. W. Steidinger. Arch. für. El. XXII, 1953, 1929
3. А. Б. Сапожников. Основы электромагнитной дефектоскопии металлических тел. Диссертация, Томск. 1951. гл. 22.
4. Г. А. Бюлер и Т. А. Луковская. — «Физика», № 2, 1968.