ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ГАУССА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В статье излагается вопрос о получении приближений функции Гаусса в виде произведения биномов. Эти приближения получены на основе теории цепных дробей и могут быть применены для вычисления изучаемой функции.

Функция Гаусса содержит параметры α, β и γ, которые в этой статье представлены при изменении в следующих интервалах $\gamma > \alpha > -1$, $\gamma > \beta > 0$, $\gamma \geqslant 2\beta - 1$; z — комплексное переменное.

1. Гипергеометрическая функция—функция Гаусса

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\kappa (\beta)_\kappa}{(\gamma)_\kappa \kappa!} (-z)^\kappa,$$

$$\gamma \neq 0,\ -1, \ldots;\ |\arg(1+z)| < \pi, \tag{1}$$

где

$$(a)_\kappa = a(a+1)\ldots(a+\kappa-1) = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}, \qquad (a)_0 = 1,$$

преобразуется следующим образом:

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -z) = e^{\ln F(\alpha,\beta;\gamma;-z)} =$$

$$= \exp\left\{\int_0^z [F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -z)]^{-1} d\,[F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -z)]\right\},$$

т. е.

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -z) = \exp\left[-\int_0^z \frac{\alpha\beta F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ -t)}{\gamma F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -t)}\,dt\right]. \tag{2}$$

Далее к числителю подынтегральной функции (2) применим рекуррентное соотношение ([1], стр. 313)

$$\frac{\beta}{\gamma} F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ -t) = \frac{1}{1+t} F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -t) -$$

$$-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{1+t} F(\alpha+1,\ \beta;\ \gamma+1;\ -t) \tag{3}$$

и заменим отношение двух рядов известным разложением его в цепную дробь ([2], стр. 132), тогда после некоторых упрощений представим функцию (1) в виде следующего произведения:

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ -z) = (1+z)^{-\alpha} \exp\left[\alpha(\gamma-\beta)\int_0^z \frac{P_{2n+1}(t)}{Q_{2n+1}(t)}\cdot\frac{dt}{1+t}\right]\times$$

$$\times \exp\left[-\alpha(\gamma-\beta)\int_0^z R_{2n+1}(t)\frac{dt}{1+t}\right], \tag{4}$$

где

$$\rho_{2n+1}(z) = -\alpha(\gamma-\beta)\int_0^z R_{2n+1}(t)\frac{dt}{1+t}; \tag{5}$$

$$\frac{P_\kappa(t)}{Q_\kappa(t)} = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_\kappa}}},$$

$$\alpha_1 = \gamma,\ \alpha_{2m} = \frac{(\gamma+2m-1)(\alpha+1)_{m-1}(\gamma-\beta+1)_{m-1}}{(\beta)_m(\gamma-\alpha)_m}\cdot\frac{1}{t},$$

$$\alpha_{2m+1} = \frac{(\gamma+2m)(\beta)_m(\gamma-\alpha_m)}{(\alpha+1)_m(\gamma-\beta+1)_m},\qquad m = 1, 2, \ldots; \tag{6}$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa-1}(t)\,Q_{2\kappa+1}(t)}. \tag{7}$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (6) известны равенства и соотношение ([3], стр. 13, 14):

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \ldots + \frac{(\gamma+1)_{2n}}{(\alpha+1)_n(\gamma-\beta+1)_n}\cdot\frac{1}{t^n} =$$

$$= \frac{(\gamma+1)_{2n}}{(\alpha+1)_n(\gamma-\beta+1)_n}\cdot\frac{1}{t^n}p_{2n+1}(t), \tag{8}$$

$$Q_{2n+1}(t) = \sum_{m=0}^{n}\alpha_{2m+1} + \ldots + \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha+1)_n(\gamma-\beta+1)_n}\cdot\frac{1}{t^n} =$$

$$= \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha+1)_n(\gamma-\beta+1)_n}\cdot\frac{1}{t^n}q_{2n+1}(t). \tag{9}$$

$$Q_{2n+1}(z) = \left(\alpha_{2n}\alpha_{2n+1} + 1 + \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}}\right)Q_{2n-1}(z) - \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}}Q_{2n-3}(z). \tag{10}$$

2. Так как $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\dfrac{1}{t\alpha_\kappa\alpha_{\kappa+1}} = \dfrac{1}{4}$, то, ввиду ([3], стр. 26), все корни многочлена $Q_{2n+1}(t)$ вещественные, расположены в интервале $(-\infty,\ -1)$, поэтому и ввиду равенства (9)

$$Q_{2n+1}(t) = \frac{(\gamma)_{2n+1}}{(\alpha+1)_n(\gamma-\beta+1)_n}\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{a_m}\right),$$

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 1. \tag{11}$$

Отсюда нетрудно сделать вывод, что при изменении t вдоль рпямолинейного отрезка, соединяющего точки 0 и z:

1) в областях

$$Re(t) \geqslant 0 \text{ и } Re\left(\frac{1}{t}\right) < -1: \quad \left|Re\left(\frac{1}{t}\right)\right| > 1 > \frac{1}{a_m},$$

минимум $\left|\frac{1}{t} + \frac{1}{a_m}\right|$ будет при $t = z$;

2) максимум частного $\frac{1}{|Q_{2\kappa-1}(t)|}$ в указанных областях изменения комплексного переменного t также будет при $t = z$. Поэтому можно получить следующее неравенство относительно модуля интеграла (5):

$$|\rho_{2n+1}(z)| < |\alpha|(\gamma - \beta)|R_{2n+1}(z)| \int_0^z \frac{|dt|}{|1+t|}. \tag{12}$$

При интегрировании вдоль радиуса точки z получим ([4], стр. 430):

1) если $Re(z) \geqslant 0$, то $\int\limits_0^z \frac{|dt|}{|1+t|} < \int\limits_0^{|z|} d|t| = |z|$;

2) если $Re\left(\frac{1}{z}\right) < -1$, то $|z| < 1$ и

$$\int\limits_0^z \frac{|dt|}{|1+t|} \leqslant \int\limits_0^{|z|} \frac{d|t|}{1-|t|} = |\ln(1-|z|)|.$$

Ввиду изложенного вводится функция

$$\tau(z) = \begin{cases} |z| \text{ для } Re(z) \geqslant 0, \\ |\ln(1-|z|)| \text{ для } Re\left(\frac{1}{z}\right) < -1 \end{cases} \tag{13}$$

и упрощается неравенство (12)

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \tau(z)|\alpha|(\gamma - \beta) R_{2n+1}(z). \tag{14}$$

3. Бесконечный функциональный ряд (7) оценивается по модулю аналогично, как это было сделано для цепной дроби (6) при $\beta = 1$ в статье ([5], стр, 24), а именно: ввиду (7), (9), (14) и $\gamma \geqslant 2\beta - 1$, после некоторых упрощений получим:

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{\tau(z)}{2} \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{|(\alpha)_\kappa|(\beta)_{\kappa-1}(\gamma-\beta)_\kappa(\gamma-\alpha)_\kappa|z|^{2\kappa-1}}{[(\gamma)_{2\kappa-1}]^2|q_{2n+1}(z)|^2[\sigma(z)]^{2\kappa-2n-1}}, \tag{15}$$

где

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1 \text{ для } Re(z) \geqslant 0, \\ |1+z| \text{ для } Re\left(\frac{1}{z}\right) < -1. \end{cases} \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что отношение последующего слагаемого к предыдущему в сумме (15) меньше $|4\sigma(z)\cdot z^{-1}|^{-2}$, а также

$$(\alpha+1)_n(\beta)_n(\gamma-\beta+1)_n(\gamma-\alpha+1)_n[(\gamma+1)_{2n}]^{-2} < 2^{-4n},$$

поэтому после упрощений окончательно получим следующую оценку по модулю для интеграла (5):

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{\tau(z)\sigma(z)|\alpha z^{2n+1}|}{[4\sigma(z)]^2 - |z|^2} \cdot \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}{2^{4n-3}\gamma|q_{2n+1}(z)|^2},$$

$$4\sigma(z) > |z|, \tag{17}$$

где $\tau(z)$ и $\sigma(z)$ принимают значения согласно равенствам (13) и (16).

Равенство (4) с учетом (8) и (9) можно записать в виде следующей суммы:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = (1+z)^{-\alpha}\exp\left[\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma}\int_0^z \frac{p_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)}\cdot\frac{dt}{1+t}\right] +$$

$$+ r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) + r_{2n+1}(z), \tag{18}$$

где

$$r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z)\{\exp[\rho_{2n+1}(z)] - 1\}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$|F_{2n+1}(z)| < |(1+z)^{-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}|\exp|\rho_1(z)|,$$

поэтому

$$|r_{2n+1}(z)| < |(1+z)^{-\frac{\alpha\beta}{\gamma}}|\exp|\rho_1(z)|\,[\exp|\rho_{2n+1}(z)| - 1]. \tag{19}$$

4. Теорема. Гипергеометрическая функция (1) представляется следующим произведением биномов:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = (1+z)^{b_0}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{a_m}\right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \tag{20}$$

где

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{a_m}\right) = q_{2n+1}(z), \qquad b_0 = -\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1}q_{2n+1}(-1)},$$

$$b_m = \frac{\alpha\beta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2(\gamma+1)(1-a_m)\dfrac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]}; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Многочлены $A_{2n+1}(z)$, $q_{2n+1}(z)$, $p_{2n+1}(z)$ следующие;

$$A_1(z) = 0;\ A_3(z) = q_1(z) = p_1(z) = 1,$$

$$q_3(z) = 1 + \frac{(\alpha+\beta+1)\gamma - 2\alpha\beta}{\gamma(\gamma+2)}z, \quad p_3(z) = 1 + \frac{(\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}z; \tag{22}$$

они для $n = 2, 3, \ldots$ определяются последовательно с помощью соотношения (25),

Верхняя граница $|r_{2n+1}(z)|$ в областях комплексного переменного $Re(z) \geqslant 0$ и $Re\left(\frac{1}{z}\right) < -1$, ограниченных $4\sigma(z) > |z|$, устанавливается неравенствами (19) и (17).

Доказательство. Если ввести равенство

$$\beta(\gamma-\alpha)zA_{2n+1}(z) = \gamma(\gamma+1)[q_{2n+1}(z) - p_{2n+1}(z)],\ n = 1, 2, \ldots; \tag{23}$$

то, ввиду равенств (4), (6), (8) — (10), (22), многочлены $A_{2n+1}(z)$, $q_{2n+1}(z)$, $p_{2n+1}(z)$, а также

$$M_{2n+1}(z) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma} p_{2n+1}(z) - \alpha q_{2n+1}(z) \qquad (24)$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\varphi_{2n+1}(z) = \left[1 + \frac{(\alpha+\beta+2n-1)\gamma + 2n(n-1) - 2\alpha\beta}{(\gamma+2n-2)(\gamma+2n)} z\right] \varphi_{2n-1}(z) -$$

$$- \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\gamma-\alpha+n-1)(\gamma-\beta+n-1)}{(\gamma+2n-3)_3(\gamma+2n-2)} z^2 \varphi_{2n-3}(z). \quad (25)$$

(25)

Равенство

$$M_{2n+1}(-1) = -\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1}} \qquad (26)$$

легко доказывается методом математической индукции с помощью соотношения (25).

Применяя равенства (21), (24), (26), преобразуем равенство (18):

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = \exp\left[\int_0^z \frac{M_{2n+1}(t)\,dt}{(1+t)\,q_{2n+1}(t)}\right] + r_{2n+1}(z) =$$

$$= \exp\left[b_0 \int_0^z \frac{dt}{1+t} + \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{a_m} \int_0^z \frac{dt}{1+\frac{t}{a_m}}\right] + r_{2n+1}(z),$$

т. е.

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -z) = (1+z)^{b_0} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{a_m}\right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \qquad (20)$$

где ввиду равенства (26)

$$b_0 = -\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{2n+1}\, q_{2n+1}(-1)}, \qquad b_m = \frac{M_{2n+1}(-a_m)}{(1-a_m)\frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]},$$

к тому же, на основании (20) и (18) верхняя граница $|r_{2n+1}(z)|$ оценивается неравенствами (19) и (17).

Ввиду равенств (9) и (11) $q_{2n+1}(-a_m) = 0$, $m = 1, \ldots, n$; поэтому, применяя равенство (24), получим

$$b_m = \frac{M_{2n+1}(-a_m) + \frac{\alpha\beta}{\gamma} q_{2n+1}(-a_m)}{(1-a_m)\frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]} =$$

$$= \frac{\alpha(\gamma-\beta)[p_{2n+1}(-a_m) - q_{2n+1}(-a_m)]}{\gamma(1-a_m)\frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]}$$

и на основании равенства (23)

$$b_m = \frac{\alpha\beta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\, a_m A_{2n+1}(-a_m)}{\gamma^2(\gamma+1)(1-a_m)\frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]},$$

тем самым теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.

2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.

3. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

4. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 21—25. 1965.