

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ Е-ФУНКЦИИ МАК-РОБЕРТА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В настоящей статье Е-функция Мак-Роберта (1) представляется в виде суммы подходящих дробей и остаточного члена, для которого дана оценка в области вещественного переменного $x > 0$.

В статье применяются сокращенные обозначения

$$y = x: (\tau \dots t), (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), (a)_0 = 1.$$

Для Е-функции Мак-Роберта ([1], стр. 200)

$$E(\alpha_1, \dots, \alpha_p, 1; \rho_1, \dots, \rho_q; x) = E[x] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + m) \dots \Gamma(\alpha_p + m)}{\Gamma(\rho_1 + m) \dots \Gamma(\rho_q + m)} \left(-\frac{1}{x}\right)^m, \quad x \gg 1, \quad p \geq q+1, \quad (1)$$

параметры которой удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \alpha_1 > \dots > \alpha_p > 1, \quad \rho_1 > \dots > \rho_q, \\ \rho_1 > \alpha_{p-q+1}, \dots, \rho_q > \alpha_p, \end{aligned} \quad (2)$$

имеет место следующая теорема.

Теорема. Функция (1) с параметрами (2) может быть представлена в виде следующей $p-1$ кратной суммы подходящих дробей:

$$\begin{aligned} E[x] &= \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1) \dots \Gamma(\rho_q)} \times \\ &\times \sum_{m=1}^n \dots \sum_{v=1}^n b_{1m} \dots b_{p-1v} \frac{P_{2n}(x_{p-1})}{Q_{2n}(x_{p-1})} + R_{pn}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты $a_{\pi\mu}$, $b_{\pi\mu}$ ($\pi = 1, \dots, p-1$, $\mu = 1, \dots, n$) в равенстве (3) имеют все положительные значения ([2], стр. 5, 24) и ввиду ([3], стр. 28, (7)), ([4], стр. 23, (5)) определяются согласно равенствам

$$\left\{ \begin{aligned} \prod_{\mu=1}^n \left(1 + \frac{x}{a_{\pi\mu}}\right) &= \sum_{\kappa=0}^n C_n^{\kappa} \frac{x^{\kappa}}{(\alpha_{\pi})_{\kappa}} = q_{2n}(x), \\ a_{\pi 1} &> \dots > a_{\pi n} > 0, \quad \pi = 1, \dots, p-q, \\ \prod_{\mu=0}^n \left(1 + \frac{x}{a_{\pi\mu}}\right) &= \sum_{\kappa=0}^n C_n^{\kappa} \frac{(\rho_{\pi-p+q} + n - 1)_{\kappa}}{(x_{\pi})_{\kappa}} x^{\kappa} = Q_{2n}(x), \\ 1 &> a_{\pi 1} > \dots > a_{\pi n} > 0, \quad \pi = p-q+1, \dots, p-1. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
b_{\pi\mu} &= \frac{-p_{2n}(-a_{\pi\mu})}{a_{\pi\mu} \frac{d}{dx} [q_{2n}(-a_{\pi\mu})]}, \quad \pi = 1, \dots, p-q; \\
p_{2n}(x) &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} x^{\kappa+1} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} C_n^m \frac{(-1)^{n-\kappa-m-1}}{(\alpha_\pi + n - \kappa - m - 1)_{\kappa+1}}, \\
b_{\pi\mu} &= \frac{-p_{2n}(-a_{\pi\mu})}{a_{\pi\mu} \frac{d}{dx} [q_{2n}(-a_{\pi\mu})]}, \quad \pi = p-q+1, \dots, p-1; \quad P_{2n}(x) = \\
&= \sum_{\kappa=0}^{n-1} x^{\kappa+1} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} C_n^{\kappa+m+1} (-1)^m \frac{(\rho_\pi - p + q + n - 1)_{\kappa+m+1}}{(\alpha_\pi + m)_{\kappa+1} (\rho_\pi - p + q)_m}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Остаточный член $R_{pn}(x)$ в равенстве (3) меньше суммы $0, 1, \dots, p-1$ кратных сумм:

$$\begin{aligned}
R_{pn}(x) &< \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1) \dots \Gamma(\rho_q)} \left[\frac{n!}{(a_1 + 1)_n q_{2n}(x_0) q_{2n+1}(x_0)} + \right. \\
&+ \sum_{m=1}^n \frac{b_{1m} n!}{(\alpha_2 + 1)_n q_{2n}(x_1) q_{2n+1}(x_1)} + \dots + \\
&+ \sum_{m=1}^n \dots \sum_{j=1}^n \frac{b_{1m} \dots b_{p-q-1j} n!}{(\alpha_{p-q} + 1)_n q_{2n}(x_{p-q-1}) q_{2n+1}(x_{p-q+1})} + \dots + \\
&\left. + \sum_{m=1}^n \dots \sum_{v=1}^n \frac{b_{1m} \dots b_{p-1v} n! (\rho_q - \alpha_p)_n}{(\rho_q)_n (\alpha_p + 1)_n q_{2n}(x_{p-1}) q_{2n+1}(x_{p-1})} \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

В неравенстве (6) многочлены $q_{2n+1}(x)$ и $Q_{2n+1}(x)$ и коэффициенты $x_0, \dots, x_{p-1}$ следующие:

$$q_{2n+1}(x) = \sum_{\kappa=0}^n C_n^\kappa \frac{x^\kappa}{(\alpha_\pi + 1)_\kappa}, \quad \pi = 1, \dots, p-q. \tag{7}$$

$$Q_{2n+1}(x) = \sum_{\kappa=0}^n C_n^\kappa \frac{(\rho_\pi - p + q + n)_\kappa}{(\alpha_\pi + 1)_\kappa} x^\kappa, \quad \pi = p-q+1, \dots, p-1.$$

$$x_0 = \frac{\rho_1 \dots \rho_q}{\alpha_2 \dots \alpha_p} x, \quad x_1 = \frac{\rho_1 \dots \rho_q}{\alpha_3 \dots \alpha_p a_{1m}} x, \dots, \tag{8}$$

$$x_{p-q-1} = \frac{\rho_1 \dots \rho_q x}{\alpha_{p-q+1} \dots \alpha_p a_{1m} \dots a_{p-q-1j}}, \dots, \quad x_{p-1} = \frac{x}{a_{1m} \dots a_{p-1v}}.$$

Доказательство. На основании ([1], стр. 201, (3)) и стр. 72, (10), (12)) представим функцию (1) кратным интегралом:

$$\begin{aligned}
E[x] &= I_p = \frac{1}{\Gamma(\rho_1 - \alpha_{p-q+1}) \dots \Gamma(\rho_q - \alpha_p)} \int_0^1 t^{\alpha_p-1} \times \\
&\times (1-t)^{\rho_q - \alpha_p - 1} dt \dots \int_0^1 s^{\alpha_{p-q+1}-1} (1-s)^{\rho_1 - \alpha_{p-q+1} - 1} dx \times \\
&\times \int_0^\infty r^{\alpha_{p-q}-1} e^{-r} dr \dots \int_0^\infty v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v \dots t}{x}\right)^{-1} e^{-v} dv.
\end{aligned} \tag{9}$$

Последний интеграл равенства (9) ввиду ([5], стр. 144) и ([3], стр. 28) представим суммой подходящей дроби и остаточного члена:

$$E[x] = I_{p-1} \int_0^{\infty} v^{\alpha_1-1} \left(1 + \frac{v \dots t}{x}\right)^{-1} e^{-v} dv < I_{p-1} \Gamma(\alpha_1) \times \\ \times \left[\frac{p_{2n}(y_1)}{q_{2n}(y_1)} + \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n}(y_1) q_{2n+1}(y_1)} \right], \quad \alpha_1 > 1, \quad y_1 = \frac{y}{w}. \quad (10)$$

Второе слагаемое неравенства (10) вычисляется до конца и меньше первого слагаемого неравенства (6)

$$\frac{I_{p-1} \Gamma(\alpha_1) n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n}(y_1) q_{2n+1}(y_1)} < \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_o)}{\Gamma(\rho_1) \dots \Gamma(\rho_q)} \times \\ \times \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n}(x_0) q_{2n+1}(x_0)}, \quad y_1 = \frac{y}{w}. \quad (11)$$

Для доказательства неравенства (11) ввиду равенств (15) преобразуем ее левую часть

$$\frac{I_{p-1} n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n}(y_1) q_{2n+1}(y_1)} = \frac{I_{p-2} \Gamma(\alpha_2) n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n}(y_2) q_{2n+1}(y_2)} + \\ + I_{p-2} \Gamma(\alpha_2) \left\{ \sum_{\lambda=1}^n \frac{\alpha_1}{\gamma_\lambda} \beta_\lambda \left[\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{p_{2\kappa}(y: \gamma_\lambda)}{q_{2\kappa}(y: \gamma_\lambda)} - \frac{1}{1 + \gamma_\lambda: y_2} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{\lambda=1}^n \varsigma_\lambda \left[\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{p_{2\kappa}(y: \delta_\lambda)}{q_{2\kappa}(y: \delta_\lambda)} - \frac{1}{1 + \delta_\lambda: y_2} \right] \right\} \leq \\ \leq \frac{I_{p-2} \Gamma(\alpha_2) n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n}(y_2) q_{2n+1}(y_2)}; \quad y_2 = \frac{y}{\alpha_2}. \quad (12)$$

Для доказательства неравенства (12) получим несколько формул.

1). Расположим корни подходящих дробей в порядке возрастания $\gamma_1 < \dots < \gamma_n$, $\delta_1 < \dots < \delta_n$, тогда ввиду ([2], стр. 15) и (15) $\gamma_\lambda > \delta_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, n$

$$\frac{p_{2\kappa}(y: \gamma_\lambda)}{q_{2\kappa}(y: \gamma_\lambda)} \leq \frac{p_{2\kappa}(y: \delta_\lambda)}{q_{2\kappa}(y: \delta_\lambda)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (13)$$

2). Последовательности четных подходящих дробей являются возрастающими последовательностями ([5], стр. 12)

$$\frac{p_{2\kappa}(y)}{q_{2\kappa}(y)} \leq \frac{p_{2\kappa+2}(y)}{q_{2\kappa+2}(y)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

3). Второе слагаемое правой части неравенства (10) ввиду (4), (5), (7) и ([6], стр. 374, (67)) преобразуем следующим путем:

$$\frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n}(y_1) q_{2n+1}(y_1)} = \frac{p_{2n+1}(y_1)}{q_{2n+1}(y_1)} - \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} = \\ = 1 - \frac{\alpha_1}{y_1} \sum_{\lambda=1}^n \frac{\beta_\lambda}{1 + \gamma_\lambda: y_1} - \sum_{\lambda=1}^n \frac{\varsigma_\lambda}{1 + \delta_\lambda: y_1} = \\ = \sum_{\lambda=1}^n \frac{\alpha_1 \beta_\lambda: \gamma_\lambda}{1 + \gamma_\lambda: y_1} - \sum_{\lambda=1}^n \frac{\varsigma_\lambda}{1 + \delta_\lambda: y_1} + \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n}. \quad (15)$$

4) Ввиду неравенств (13) и (14) получим еще несколько неравенств

$$\frac{y}{y + \gamma_\lambda \alpha_2} \leq \frac{y}{y + \gamma_\lambda (\alpha_2 - \varepsilon)} \leq \frac{p_{2\kappa+2}(y; \gamma_\lambda)}{q_{2\kappa+2}(y; \gamma_\lambda)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (16)$$

$$\frac{y}{y + \delta_\lambda \alpha_2} \leq \frac{y}{y + \delta_\lambda (\alpha_2 - \varepsilon)} \leq \frac{p_{2\kappa+2}(y; \delta_\lambda)}{q_{2\kappa+2}(y; \delta_\lambda)}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17)$$

Далее, ввиду неравенств (13), (14), (16) и (17), сумма, расположенная в фигурных скобках левой части неравенства (12), удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=1}^n \frac{\alpha_1}{\gamma_\lambda} \beta_\lambda \left[\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{p_{2\kappa}(y; \gamma_\lambda)}{q_{2\kappa}(y; \gamma_\lambda)} - \frac{y}{y + \gamma_\lambda \alpha_2} \right] - \\ & - \sum_{\lambda=1}^n \varsigma_\lambda \left[\lim_{\kappa \rightarrow 8} \frac{p_{2\kappa}(y; \delta_\lambda)}{q_{2\kappa}(y; \delta_\lambda)} - \frac{y}{y + \delta_\lambda \alpha_2} \right] \leq \\ & \leq \sum_{\lambda=1}^n \frac{\alpha_1}{\gamma_\lambda} \beta_\lambda \left[\frac{y}{y + \gamma_\lambda (\alpha_2 - \varepsilon)} - \frac{y}{y + \gamma_\lambda \alpha_2} \right] - \\ & - \sum_{\lambda=1}^n \varsigma_\lambda \left[\frac{y}{y + \delta_\lambda (\alpha_2 - \varepsilon)} - \frac{y}{y + \delta_\lambda \alpha_2} \right] = F(y). \end{aligned} \quad (18)$$

Правая часть неравенства (18) ввиду (4), (7) и (15) имеет неположительное значение

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n} \left(\frac{y}{\alpha_2 - \varepsilon} \right) q_{2n+1} \left(\frac{y}{\alpha_2 - \varepsilon} \right)} - \\ & - \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n q_{2n} \left(\frac{y}{\alpha_2} \right) q_{2n+1} \left(\frac{y}{\alpha_2} \right)} \leq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

поэтому, ввиду неравенств (18) и (19), справедливо также и неравенство (12).

Преобразуя аналогично вышеизложенному $p-2$ кратный интеграл I_{p-2} правой части неравенства (12), а также ввиду ([7], стр. 312, (9)), ([4], стр. 23, (5)) и (9), мы получим неравенство (11).

Первое слагаемое правой части неравенства (10) представим в виде суммы элементарных дробей. Интеграл от каждой элементарной дроби в свою очередь будет опять являться интегралом такого же вида, как и последний интеграл правой части равенства (9) и т. д.

Последовательное интегрирование элементарных дробей один раз и остаточных членов до конца и представление интегралов от элементарных дробей подходящими дробями и остаточными членами и опять следующее интегрирование элементарных дробей и т. д. приведет нас к формуле (3) и оценке остаточного члена согласно формуле (6), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
3. В. Е. Корнилов. Применение цепных дробей к вычислению некоторых видов интегралов. «Изв. ТПИ», т. 131, стр. 26—30, Томск, 1965.

4. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. «Изв. ТПИ». т. 131, стр. 21—25, Томск, 1965.
 5. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
 6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. т. 3, ч. 2, М., ГИТТЛ, 1953.
 7. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1952.
-