

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В настоящей статье для обобщенных гипергеометрических функций (22) и (23) доказана теорема о том, что они могут быть представлены цепной дробью (2) с положительными членами звеньев. Если указанные функции вычислять с помощью подходящих дробей, то для этих приближений справедливы оценки остаточных членов по модулю согласно теореме п. 2.

1. Пусть дан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad |z| < 1 \text{ или } |z| \ll 1. \quad (1)$$

Соответствующая этому ряду цепная дробь имеет положительные члены звеньев ($a_m, b_m > 0, m = 1, 2, \dots$)

$$f(z) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{-a_2 z}{b_2 + \dots + \frac{-a_n z}{b_n + \dots}}} \quad (2)$$

В дальнейшем необходима также конечная цепная дробь

$$\frac{P_\kappa^n(z)}{Q_\kappa^n(z)} = b_n + \frac{-a_{n+1} z}{b_{n+1} + \dots + \frac{-a_{n+\kappa} z}{b_{n+\kappa}}} \quad (3)$$

Знаменатели подходящих дробей для цепной дроби (2) следующие:

$$\begin{cases} Q_{2n}(z) = b_1 \dots b_{2n} + \dots + a_2 a_4 \dots a_{2n} (-z)^n, \\ Q_{2n+1}(z) = b_1 \dots b_{2n+1} + \dots + (b_1 a_3 a_5 \dots a_{2n+1} + \dots \\ \dots + a_2 a_4 \dots a_{2n} b_{2n+1}) (-z)^n. \end{cases} \quad (4)$$

На основании (1), (2) и ([1], стр. 5, 24) все корни многочлена $Q_m(z)$ расположены в интервале $(1, +\infty)$, если ряд (1) сходится для $|z| < 1$ и в интервале $(0, +\infty)$ для $|z| \ll 1$.

2. Представим функцию (1) следующей суммой:

$$f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} + R_m(z), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Теорема. Для модуля $R_m(z)$ равенства (5) справедливы неравенства

$$|R_m(z)| < |S_\kappa| < |S_{\kappa-1}| < \dots < |S_1|, \quad \operatorname{Re} z \leq 0, \quad (6)$$

где

$$(-1)^m S_\kappa = \frac{P_{m+2\kappa-1}(z)}{Q_{m+2\kappa-1}(z)} - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Для ряда (1), сходящегося в единичном круге, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} |R_m(z)| < \frac{a_1 \dots a_{m+1} |z|^m \lambda |\beta : z - 1|}{|Q_m(z) Q_{m+1}(z)| (|\beta : z - 1| - 1)}, \quad 0 < \operatorname{Re} z \leq 1, \\ |\beta : z - 1| > 1; \quad \beta = \min \frac{\theta_{m+n} \theta_{m+n+1}}{a_{m+n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \lambda = \max \frac{Q_2^m(1) \dots Q_2^{m+n-1}(1) Q_m(1) Q_{m+1}(1)}{Q_{m+n}(1) Q_{m+n+1}(1)}, \quad m = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (8)$$

Доказательство. Для доказательства неравенств (6) достаточно доказать неравенство

$$|S_\kappa| < |S_{\kappa-1}|, \quad \kappa = 2, 3, \dots \quad (9)$$

На основании формул ([2], стр. 450, (3.4), (3.5)) вычислим разность между подходящими дробями S_κ

$$S_\kappa = \frac{a_1 \dots a_{m+1} z^m Q_{2\kappa-2}^{m+1}(z)}{Q_m(z) Q_{m+2\kappa-1}(z)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Неравенство (9) на основании равенства (10) преобразуется к следующему неравенству

$$|N(z)| = |Q_{m+2\kappa-1}(z) Q_{2\kappa-4}^{m+1}(z)| > |Q_{m+2\kappa-3}(z) Q_{2\kappa-2}^{m+1}(z)| = |L(z)|. \quad (11)$$

Т. И. Стильтес в своей монографии [1] подробно изучил многочлены неравенства (11), им установлено следующее:

1). Положительные корни многочленов $Q_{m+2\kappa-3}(z)$ и $Q_{2\kappa-4}^{m+1}(z)$ расположены соответственно между корнями многочленов $Q_{m+2\kappa-1}(z)$ и $Q_{2\kappa-2}^{m+1}(z)$.

2). Все корни многочлена $L(z)$ расположены между крайними корнями многочлена $N(z)$.

Докажем неравенство (11) в случае $m = 2n + 1$. На основании первого равенства (4) и равенств (3) и (11) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} N(z) = C \prod_{e=1}^{n+2\kappa-2} \left(1 - \frac{z}{\alpha_e}\right), \quad \alpha_1 < \dots < \alpha_{n+2\kappa-2}, \\ C = \theta_1 \dots \theta_{2n+2\kappa} \theta_{2n+3} \dots \theta_{2n+2\kappa-2}; \end{array} \right. \quad (12)$$

$$L(z) = C \prod_{e=1}^{n+2\kappa-2} \left(1 - \frac{z}{\beta_e}\right), \quad \beta_1 < \dots < \beta_{n+2\kappa-2}. \quad (13)$$

Из равенств (12) и (13) видно, что свободные коэффициенты многочленов $N(z)$ и $L(z)$ одинаковы, а также ввиду первого равенства (4) имеем

$$\alpha_1 \dots \alpha_{n+2\kappa-2} = \beta_1 \dots \beta_{n+2\kappa-2}. \quad (14)$$

Далее докажем, что корни многочлена $N(z) L(z)$ ввиду неравенств (12), (13) и ([1], стр. 10-20) удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 < \beta_1 < (\alpha_2, \beta_2) < (\alpha_3, \beta_3) < \dots < (\alpha_{n+2\kappa-3}, \beta_{n+2\kappa-3}) < \beta_{n+2\kappa-2} < \alpha_{n+2\kappa-2}, \quad (15)$$

где неравенство $\beta_1 < (\alpha_2, \beta_2)$ равнозначно $\beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$ или $\beta_1 < \beta_2 < \alpha_2$ и т. д. Предположим, что последовательность корней (15) нарушена и представляется в общем случае следующими неравенствами

$$\alpha_{m-1} < \beta_{m-1} < \alpha_m < \alpha_{m+1} < \beta_m < \beta_{m+1} < \beta_{m+2} < \alpha_{m+2},$$

$$m = 2, \dots, n + 2\kappa - 4. \quad (16)$$

Пусть α_m принадлежит многочлену $Q_{2n+2\kappa}(z)$ и является его κ -м корнем ($\kappa \leq m$), тогда корень α_{m+1} может принадлежать только многочлену $Q_{2\kappa-4}^{2n+2}(z)$ и он будет его $n+1-\kappa$ -м корнем в порядке возрастания корней. Далее имеем: κ корней многочлена $Q_{2n+2\kappa}(z)$ разделяют $\kappa-1$ корней многочлена $Q_{2n+2\kappa-2}(z)$; $m-\kappa+1$ корней многочлена $Q_{2\kappa-4}^{2n+2}(z)$ должны следовать за $m-\kappa+1$ корнями многочлена $Q_{2\kappa-2}^{2n+2}(z)$, так как они их тоже разделяют. Следовательно, всего имеем m корней β_i , которые предшествуют корню α_{m+1} , а согласно последовательности (16) мы имеем только $m-1$ корней β_i , предшествующих корню α_{m+1} . На основании этого противоречия приходим к заключению, что последовательность корней вида (16) не имеет места и корни многочлена $N(z)$ $L(z)$ расположены согласно неравенствам (15). Построим многочлен $M(z)$, корни которого следуют через каждые два корня последовательности (15):

$$\begin{cases} M(z) = C \prod_{e=1}^{n+2\kappa-3} \left(1 - \frac{z}{\gamma_e}\right), & \alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \dots \\ \dots < \alpha_{n+2\kappa-2}; & \beta_1 < \gamma_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \dots < \beta_{n+2\kappa-2}. \end{cases} \quad (17)$$

Многочлен $M(z)$ умножаем на такой двучлен $1 - z/\gamma$, чтобы выполнялось равенство

$$\gamma_1 \dots \gamma_{n+2\kappa-3} \gamma = \alpha_1 \dots \alpha_{n+2\kappa-2}; \quad \beta_1 < \gamma < \beta_{n+2\kappa-2}. \quad (18)$$

Пусть числа δ_1 и δ_2 такие, что $\beta_{n+2\kappa-2} < \delta_2 < \alpha_{n+2\kappa-2}$, $\alpha_1 < \delta_1 < \beta_1$, тогда, перемножая следующие неравенства ([3], 18)

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{z}{\gamma_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma}\right| &\leq \left|1 - \frac{z}{\delta_1}\right| \left|1 - \frac{\delta_1 z}{\gamma \gamma_1}\right|, \\ \left|1 - \frac{\delta_1 z}{\gamma \gamma_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma_{n+2\kappa-3}}\right| &\leq \left|1 - \frac{z}{\delta_2}\right| \left|1 - \frac{\delta_1 \delta_2 z}{\gamma \gamma_1 \gamma_{n+2\kappa-3}}\right|, \quad \operatorname{Re} z \leq 0; \end{aligned}$$

получим

$$\left|1 - \frac{z}{\gamma_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma_{n+2\kappa-3}}\right| \leq \left|1 - \frac{z}{\delta_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\delta_2}\right| \left|1 - \frac{\delta_1 \delta_2 z}{\gamma \gamma_1 \gamma_{n+2\kappa-3}}\right|, \quad (19)$$

$$\alpha_1 < \delta_1 \delta_2 : (\gamma \gamma_1 \gamma_{n+2\kappa-3}) < \alpha_{n+2\kappa-2}, \quad \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Заменяя три двучлена многочлена $(1 - z/\gamma) M(z)$ правой частью неравенства (19), мы получим многочлен $M_1(z)$, который ввиду ([3], (18)) удовлетворяет неравенствам

$$|L(z)| < |M_1(z)| < |N(z)|, \quad \operatorname{Re} z \leq 0. \quad (20)$$

На основании неравенств (20) справедливы неравенства (11) и (9), что и требовалось доказать.

Для области $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$ ввиду формул (8), (11) — (15) и ([3], (18)) получим

$$\begin{aligned} |R_m(z)| &< \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{m+1} |z|^m}{|Q_m(z) Q_{m+1}(z)|} \left(1 + \frac{\alpha_{m+2} |z| Q_2^m(1) Q_m(1)}{|Q_2^m(z) Q_{m+2}(1)|} + \dots\right) < \\ &< \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{m+1} |z|^m \lambda}{|Q_m(z) Q_{m+1}(z)|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\beta : z - 1|^n}, \quad 0 < \operatorname{Re} z \leq 1. \end{aligned}$$

На основании полученного неравенства соотношения (8) справедливы и в этом случае.

Аналогично теорема доказывается в случае, если в неравенстве (11) $m = 2n$, только при этом ввиду второго равенства (4) мы получим

$$\alpha_1 \dots \alpha_{n+2k-2} < \beta_1 \dots \beta_{n+2k-2}. \quad (21)$$

На основании равенства (14) неравенство (21) только усиливает неравенство (11), так как корни многочленов $N(z)$ и $L(z)$ расположены в знаменателях вторых слагаемых двучленов.

3. Для обобщенных гипергеометрических функций ([4], стр. 199, 202):

$$\left\{ \begin{aligned} {}_{p+1}F_p(a_1, \dots, a_p, 1; \theta_1, \dots, \theta_p; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(\theta_1)_n \dots (\theta_p)_n} z^n; |z| < 1, (a)_0 = 1, \\ (a)_n &= a(a+1) \dots (a+n-1), \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, p; \\ \theta_1 &> a_1, \dots, \theta_p > a_p; \end{aligned} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} E(a_1, \dots, a_p, 1; \rho_1, \dots, \rho_q; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(\rho_1)_n \dots (\rho_q)_n} \left(-\frac{1}{z}\right)^n; |z| \gg 1, \quad p > q; \\ a_i &> 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad \rho_1 > a_1, \dots, \rho_q > a_q; \end{aligned} \right. \quad (23)$$

справедлива следующая теорема.

Теорема. Соответствующие для рядов (22) и (23) цепные дроби (2) имеют положительные члены звеньев

$$a_m, \theta_m > 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Степенному ряду

$$F(a_i, 1; \theta_i; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_i)_n}{(\theta_i)_n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad i = 1, \dots, p \quad (24)$$

соответствует цепная дробь (2) с положительными членами звеньев ([5], стр. 21, (1)).

На основании ([1], стр. 23) квадратичная форма

$$\sum_{i, k=0}^{m-1} c_{p+i+k} x_i x_k \quad (25)$$

есть форма определенная и положительная. В силу равенств (22) — (25), ([6], задача 1220) и ([7], стр. 140, (11.5)) квадратичные формы

$$\sum_{i, k=0}^{m-1} d_{p+i+k} x_i x_k, \quad \sum_{i, k=0}^{m-1} h_{p+i+k} x_i x_k \quad (26)$$

есть формы определенные и положительные.

Ввиду (26) и ([1], стр. 23) детерминанты

$$\begin{vmatrix} d_p & \dots & d_{p+m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{p+m-1} & \dots & d_{p+2m-2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} h_p & \dots & h_{p+m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+m-1} & \dots & h_{p+2m-2} \end{vmatrix} \quad (27)$$

положительны. Так как члены звеньев цепной дроби (2) выражаются через определители (27) ([1], стр. 29, (7)), то они также положительны, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Стильтес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
 2. С. С. Хлопонин. Некоторые преобразования цепных дробей. Ученые записки Марийского пединститута, т. XXVI, стр. 445—486, Йошкар-Ола, 1965.
 3. В. Е. Корнилов. Вычисление эллиптических интегралов при помощи цепных дробей. Изв. ТПИ, т. 205. 1969.
 4. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
 5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномиальных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 21—25, 1965.
 6. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. Гостехиздат, 1957.
 7. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
-