ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В настоящей статье для обобщенных гипергеометрических функций (22) и (23) доказана теорема о том, что они могут быть представлены цепной дробью (2) с положительными членами звеньев. Если указанные функции вычислять с помощью подходящих дробей, то для этих приближений справедливы оценки остаточных членов по модулю согласно теореме п. 2.

1. Пусть дан степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad |z|<1 \text{ или } |z|\ll 1. \tag{1}$$

Соответствующая этому ряду цепная дробь имеет положительные члены звеньев ($a_m, в_m>0, \quad m=1, 2, \ldots$)

$$f(z)=\cfrac{a_1}{в_1+\cfrac{-a_2 z}{в_2+\ldots+\cfrac{-a_n z}{в_n+\ldots}}} \tag{2}$$

В дальнейшем необходима также конечная цепная дробь

$$\frac{P_к^n(z)}{Q_к^n(z)}=в_n+\cfrac{-a_{n+1} z}{в_{n+1}+\ldots+\cfrac{-a_{n+к} z}{в_{n+к}}} \tag{3}$$

Знаменатели подходящих дробей для цепной дроби (2) следующие:

$$\begin{cases} Q_{2n}(z)=в_1\ldots в_{2n}+\ldots+a_2a_4\ldots a_{2n}(-z)^n, \\ Q_{2n+1}(z)=в_1\ldots в_{2n+1}+\ldots+(в_1a_3a_5\ldots a_{2n+1}+\ldots \\ \qquad \ldots+a_2a_4\ldots a_{2n}в_{2n+1})(-z)^n. \end{cases} \tag{4}$$

На основании (1), (2) и ([1], стр. 5,24) все корни многочлена $Q_m(z)$ расположены в интервале $(1, +\infty)$, если ряд (1) сходится для $|z|<1$ и в интервале $(0, +\infty)$ для $|z|\ll 1$.

2. Представим функцию (1) следующей суммой:

$$f(z)=\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}+R_m(z), \quad m=1, 2, \ldots \tag{5}$$

Теорема. Для модуля $R_m(z)$ равенства (5) справедливы неравенства

$$|R_m(z)| < |S_\kappa| < |S_{\kappa-1}| < \ldots < |S_1|, \quad Rez \leqslant 0, \tag{6}$$

где

$$(-1)^m S_\kappa = \frac{P_{m+2\kappa-1}(z)}{Q_{m+2\kappa-1}(z)} - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Для ряда (1), сходящегося в единичном круге, имеем:

$$\begin{cases} |R_m(z)| < \dfrac{a_1 \ldots a_{m+1} |z|^m \lambda |\beta : z - 1|}{|Q_m(z) Q_{m+1}(z)| (|\beta : z - 1| - 1)}, \quad 0 < Rez \leqslant 1, \\ |\beta : z - 1| > 1; \quad \beta = \min \dfrac{в_{m+n} в_{m+n+1}}{a_{m+n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \lambda = \max \dfrac{Q_2^m(1) \ldots Q_2^{m+n-1}(1) Q_m(1) Q_{m+1}(1)}{Q_{m+n}(1) Q_{m+n+1}(1)}, \quad m = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. Для доказательства неравенств (6) достаточно доказать неравенство

$$|S_\kappa| < |S_{\kappa-1}|, \quad \kappa = 2, 3, \ldots \tag{9}$$

На основании формул ([2], стр. 450, (3.4), (3.5)) вычислим разность между подходящими дробями S_κ

$$S_\kappa = \frac{a_1 \ldots a_{m+1} z^m Q_{2\kappa-2}^{m+1}(z)}{Q_m(z) Q_{m+2\kappa-1}(z)}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Неравенство (9) на основании равенства (10) преобразуется к следу ющему неравенству

$$|N(z)| = |Q_{m+2\kappa-1}(z) Q_{2\kappa-4}^{m+1}(z)| > |Q_{m+2\kappa-3}(z) Q_{2\kappa-2}^{m+1}(z)| = |L(z)|. \tag{11}$$

Т. И. Стилтьес в своей монографии [1] подробно изучил многочлены неравенства (11), им установлено следующее:

1). Положительные корни многочленов $Q_{m+2\kappa-3}(z)$ и $Q_{2\kappa-4}^{m+1}(z)$ расположены соответственно между корнями многочленов $Q_{m+2\kappa-1}(z)$ и $Q_{2\kappa-2}^{m+1}(z)$.

2). Все корни многочлена $L(z)$ расположены между крайними корнями многочлена $N(z)$.

Докажем неравенство (11) в случае $m = 2n + 1$. На основании первого равенства (4) и равенств (3) и (11) имеем

$$\begin{cases} N(z) = C \prod\limits_{e=1}^{n+2\kappa-2} \left(1 - \dfrac{z}{\alpha_e}\right), \quad \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n+2\kappa-2}, \\ \qquad C = в_1 \ldots в_{2n+2\kappa} в_{2n+3} \ldots в_{2n+2\kappa-2}; \end{cases} \tag{12}$$

$$L(z) = C \prod_{e=1}^{n+2\kappa-2} \left(1 - \frac{z}{\beta_e}\right), \quad \beta_1 < \ldots < \beta_{n+2\kappa-2}. \tag{13}$$

Из равенств (12) и (13) видно, что свободные коэффициенты многочленов $N(z)$ и $L(z)$ одинаковы, а также ввиду первого равенства (4) имеем

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{n+2\kappa-2} = \beta_1 \ldots \beta_{n+2\kappa-2}. \tag{14}$$

Далее докажем, что корни многочлена $N(z) L(z)$ ввиду неравенств (12), (13) и ([1], стр. 10-20) удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 < \beta_1 < (\alpha_2, \beta_2) < (\alpha_3, \beta_3) < \ldots$$
$$\ldots < (\alpha_{n+2\kappa-3}, \beta_{n+2\kappa-3}) < \beta_{n+2\kappa-2} < \alpha_{n+2\kappa-2}, \tag{15}$$

где неравенство $\beta_1 < (\alpha_2, \beta_2)$ равнозначно $\beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$ или $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$ и т. д. Предположим, что последовательность корней (15) нарушена и представляется в общем случае следующими неравенствами

$$\alpha_{m-1} < \beta_{m-1} < \alpha_m < \alpha_{m+1} < \beta_m < \beta_{m+1} < \beta_{m+2} < \alpha_{m+2}, \quad m = 2, \ldots, n + 2\kappa - 4. \tag{16}$$

Пусть α_m принадлежит многочлену $Q_{2n+2\kappa}(z)$ и является его κ-м корнем $(\kappa \leqslant m)$, тогда корень α_{m+1} может принадлежать только многочлену $Q_{2\kappa-4}^{2n+2}(z)$ и он будет его $n+1-\kappa$-м корнем в порядке возрастания корней. Далее имеем: κ корней многочлена $Q_{2n+2\kappa}(z)$ разделяют $\kappa - 1$ корней многочлена $Q_{2n+2\kappa-2}(z)$; $m - \kappa + 1$ корней многочлена $Q_{2\kappa-4}^{2n+2}(z)$ должны следовать за $m - \kappa + 1$ корнями многочлена $Q_{2\kappa-2}^{2n+2}(z)$, так как они их тоже разделяют. Следовательно, всего имеем m корней β_i, которые предшествуют корню α_{m+1}, а согласно последовательности (16) мы имеем только $m - 1$ корней β_i, предшествующих корню α_{m+1}. На основании этого противоречия приходим к заключению, что последовательность корней вида (16) не имеет места и корни многочлена $N(z)\, L(z)$ расположены согласно неравенствам (15). Построим многочлен $M(z)$, корни которого следуют через каждые два корня последовательности (15):

$$\begin{cases} M(z) = C \prod\limits_{e=1}^{n+2\kappa-3} \left(1 - \dfrac{z}{\gamma_e}\right), \quad \alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \gamma_2 < \ldots \\ \ldots < \alpha_{n+2\kappa-2}; \quad \beta_1 < \gamma_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \ldots < \beta_{n+2\kappa-2}. \end{cases} \tag{17}$$

Многочлен $M(z)$ умножаем на такой двучлен $1 - z:\gamma$, чтобы выполнялось равенство

$$\gamma_1 \ldots \gamma_{n+2\kappa-3}\,\gamma = \alpha_1 \ldots \alpha_{n+2\kappa-2}; \quad \beta_1 < \gamma < \beta_{n+2\kappa-2}. \tag{18}$$

Пусть числа δ_1 и δ_2 такие, что $\beta_{n+2\kappa-2} < \delta_2 < \alpha_{n+2\kappa-2}$, $\alpha_1 < \delta_1 < \beta_1$, тогда, перемножая следующие неравенства ([3], 18)

$$\left|1 - \frac{z}{\gamma_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma}\right| \leqslant \left|1 - \frac{z}{\delta_1}\right| \left|1 - \frac{\delta_1 z}{\gamma\gamma_1}\right|,$$

$$\left|1 - \frac{\delta_1 z}{\gamma\gamma_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma_{n+2\kappa-3}}\right| \leqslant \left|1 - \frac{z}{\delta_2}\right| \left|1 - \frac{\delta_1\delta_2 z}{\gamma\gamma_1\gamma_{n+2\kappa-3}}\right|, \quad Re z \leqslant 0;$$

получим

$$\left|1 - \frac{z}{\gamma_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma}\right| \left|1 - \frac{z}{\gamma_{n+2\kappa-3}}\right| \leqslant \left|1 - \frac{z}{\delta_1}\right| \left|1 - \frac{z}{\delta_2}\right| \left|1 - \frac{\delta_1\delta_2 z}{\gamma\gamma_1\gamma_{n+2\kappa-3}}\right|, \tag{19}$$

$$\alpha_1 < \delta_1\delta_2 : (\gamma\gamma_1\gamma_{n+2\kappa-3}) < \alpha_{n+2\kappa-2}, \quad Re z \leqslant 0.$$

Заменяя три двучлена многочлена $(1 - z:\gamma)\, M(z)$ правой частью неравенства (19), мы получим многочлен $M_1(z)$, который ввиду ([3], (18)) удовлетворяет неравенствам

$$|L(z)| < |M_1(z)| < |N(z)|, \quad Re z \leqslant 0. \tag{20}$$

На основании неравенств (20) справедливы неравенства (11) и (9), что и требовалось доказать.

Для области $0 < Re z \leqslant 1$ ввиду формул (8), (11) — (15) и ([3], (18) получим

$$|R_m(z)| < \frac{a_1 \ldots a_{m+1} |z|^m}{|Q_m(z)\, Q_{m+1}(z)|} \left(1 + \frac{a_{m+2} |z|\, Q_2^m(1)\, Q_m(1)}{|Q_2^m(z)|\, Q_{m+2}(1)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{a_1 \ldots a_{m+1} |z|^m \lambda}{|Q_m(z)\, Q_{m+1}(z)|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\beta:z - 1|^n}, \quad 0 < Re z \leqslant 1.$$

На основании полученного неравенства соотношения (8) справедливы и в этом случае.

Аналогично теорема доказывается в случае, если в неравенстве (11) $m = 2n$, только при этом ввиду второго равенства (4) мы получим

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{n+2\kappa-2} < \beta_1 \ldots \beta_{n+2\kappa-2}\,. \tag{21}$$

На основании равенства (14) неравенство (21) только усиливает неравенство (11), так как корни многочленов $N(z)$ и $L(z)$ расположены в знаменателях вторых слагаемых двучленов.

3. Для обобщенных гипергеометрических функций ([4], стр. 199, 202):

$$\begin{cases} {}_{p+1}F_p(a_1, \ldots, a_p, 1;\ в_1, \ldots, в_p;\ z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(в_1)_n \ldots (в_p)_n} z^n;\ |z| < 1,\ (a)_0 = 1, \\ (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, p; \\ \qquad в_1 > a_1, \ldots, в_p > a_p; \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} E(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1 : \rho_1, \ldots, \rho_q : z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n z^n = \\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\rho_1)_n \ldots (\rho_q)_n} \left(-\dfrac{1}{z}\right)^n; \quad |z| \gg 1, \quad p > q; \\ \alpha_i > 0, \quad i = 1, \ldots, p; \quad \rho_1 > \alpha_1, \ldots, \rho_q > \alpha_q; \end{cases} \tag{23}$$

справедлива следующая теорема.

Теорема. Соответствующие для рядов (22) и (23) цепные дроби (2) имеют положительные члены звеньев

$$a_m,\ в_m > 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Степенному ряду

$$F(a_i, 1; в_i; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_i)_n}{(в_i)_n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ i = 1, \ldots, p \tag{24}$$

соответствует цепная дробь (2) с положительными членами звеньев ([5], стр. 21, (1)).

На основании ([1], стр. 23) квадратичная форма

$$\sum_{i,\,\kappa=0}^{m-1} c_{p+i+\kappa} x_i x_\kappa \tag{25}$$

есть форма определенная и положительная. В силу равенств (22) — (25), ([6], задача 1220) и ([7], стр. 140, (11.5)) квадратичные формы

$$\sum_{i,\,\kappa=0}^{m-1} d_{p+i+\kappa} x_i x_\kappa\,, \qquad \sum_{i,\,\kappa=0}^{m-1} h_{p+i+\kappa} x_i x_\kappa \tag{26}$$

есть формы определенные и положительные.

Ввиду (26) и ([1], стр. 23) детерминанты

$$\begin{vmatrix} d_p \ldots & d_{p+m-1} \\ \cdots\cdots & \cdots \\ d_{p+m-1} & d_{p+2m-2} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} h_p \ldots & h_{p+m-1} \\ \cdots\cdots & \cdots \\ h_{p+m-1} & h_{p+2m-2} \end{vmatrix} \tag{27}$$

положительны. Так как члены звеньев цепной дроби (2) выражаются через определители (27) ([1], стр. 29, (7)), то они также положительны, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
2. С. С. Хлопонин. Некоторые преобразования цепных дробей. Ученые записки Марийского growth пединститута, т. XXVI, стр. 445—486, Иошкар-Ола, 1965.
3. В. Е. Корнилов. Вычисление эллиптических интегралов при помощи цепных дробей. Изв. ТПИ, т. 205. 1969.
4. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 21—25, 1965.
6. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. Гостехиздат, 1957.
7. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.