

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ, С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Л. Ф. ЧЕРНОГАЛОВА

(Представлена научным семинаром сектора сверхвысоких частот и теории ускорителей
НИИ ЯФЭА)

Дисперсионные свойства диафрагмированных волноводов и других систем обычно исследуются методом частичных областей, т. е. электромагнитные поля задаются независимо в пространстве резонаторов и в пространстве взаимодействия в виде суммы пространственных гармоник. Проводя сшивание тангенциальных компонент на границе раздела областей, получают дисперсионное уравнение в виде бесконечных определителей. Однако решение такого дисперсионного уравнения очень громоздко, так как приходится решать сложное трансцендентное уравнение. Степень точности решения этого уравнения будет зависеть от числа членов, удерживаемых в бесконечной системе. Кроме того, этот метод справедлив для случая частных диафрагм. В то же время практика показывает, что число диафрагм в волноводном электронном ускорителе, приходящихся на длину волны генератора, обычно не превышает 3—4.

Учитывая обычные условия работы диафрагмированных волноводных ускорителей, В. В. Владимирский [1] предложил исследовать распространение электромагнитных волн в круглом волноводе на основе метода нормальных волн. Круглый диафрагмированный волновод рассматривался им как цепочка связанных цилиндрических эндовибраторов с бесконечно тонкими мембранами и малыми отверстиями для пролета пучка. Достоинство такого метода состоит в том, что дисперсионное уравнение, получаемое на его основе, представляет простое алгебраическое уравнение относительно постоянной распространения β_n . При расчете дисперсии системы здесь не нужно будет решать сложных трансцендентных уравнений. Кроме того, уже в первом приближении метод правильно учитывает особенности поля на ребрах диафрагм и позволяет получить хорошее совпадение с экспериментом, если число диафрагм на длину волны в волноводе невелико.

В связи с тем, что в ускорительной технике и технике приборов СВЧ большой интерес представляют прямоугольные диафрагмирован-

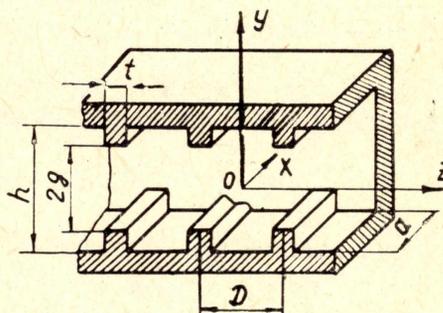


Рис. 1. Разрез камеры волновода

ные волноводы, в работах [2, 3] методом нормальных волн были исследованы диафрагмированные волноводы прямоугольного сечения.

В этих работах рассматривалось распространение синфазных LE -волн (для LE -волн $E_x = 0$) вдоль волновода прямоугольного сечения. В отличие от метода сшивания поле здесь задается сразу по всей ячейке, а затем, согласно условию Флоке, сшивается на границах ячеек:

$$z = \pm \frac{1}{2} D; \pm \frac{3}{2} D; \pm \dots$$

Компоненты LE -волн выражаются через x -компоненту магнитного вектора Герца m ячейки, которая для синфазных волн имеет вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} \Pi_x^m = e^{-jm\psi} \cdot \cos \frac{\pi}{a} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cdot \sin \beta_n (z - mD) + B_n \cos \beta_n (z - mD)] \cdot \\ \cdot \sin (2n + 1) \frac{\pi}{b} y; \end{aligned}$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2; \dots$ — номер ячейки;

где

$$(2m - 1) \frac{1}{2} D < z < (2m + 1) \frac{1}{2} D;$$

$$\beta_n = \sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (2n + 1)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \text{ — постоянная распространения,}$$

$\kappa = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в свободном пространстве;

$0 \leq \psi \leq \pi$ — характеризует сдвиг фаз между колебаниями в соседних ячейках и связана с фазовой скоростью волны соотношением

$$v_{\phi} = c \frac{\kappa D}{\psi} = \frac{\omega D}{\psi}. \quad (2)$$

Записав граничные условия

$$E_z \left(\frac{b}{2}, z \right) = 0 \text{ при } -\infty < z < +\infty;$$

$$E_y(y, z) = 0 \text{ при } g < y < \frac{b}{2},$$

$$(2m - 1) \frac{1}{2} D \leq z \leq (2m + 1) \frac{1}{2} D \quad (3)$$

и дополнив их условиями периодичности для вектора Герца Π_x^m и его нормальной производной $\frac{\partial}{\partial z} \Pi_x^m$, после ряда преобразований в [2] было получено относительно $F(\eta)$ следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_0 D}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta_0 D}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{b} y \cdot \int_{-g}^{+g} F(\eta) \sin \frac{\pi}{b} \eta \cdot d\eta = \\ = - \int_{-g}^{+g} G(y, \eta) F(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(\eta)$ — вид поля, задаваемый на отверстии диафрагм. При использовании метода нормальных волн поле задается с учетом особенностей на ребрах диафрагм

$G(y, \eta)$ — ядро:

$$G(y, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_n D}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta_n D}{2}}{\beta_n} \cdot \sin(2n+1) \frac{\pi}{b} y \cdot \sin(2n+1) \frac{\pi}{b} \eta. \quad (5)$$

Суммирование в (5) ведется по типам волн отдельной ячейки.

Приближение этого метода состоит в том, что, начиная с некоторого n в зависимости от предлагаемой точности решения уравнения, пренебрегают зависимостью β_n от частоты и записывают

$$(\beta_n) = (2n+1) \frac{\pi}{b}.$$

Кроме того, полагают, что при тех условиях, которые имеются обычно в электронных волноводных ускорителях, зависимость ядра G от ψ и D очень слабая и экспоненциально падает с ростом D . Это позволяет при больших n и не очень малых D положить $g_n(\beta_n) = 1$, где

$$g_n = \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_n D}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta_n D}{2}}{\beta_n}.$$

Задавая вид поля на отверстии диафрагм и решая интегральное уравнение (4), можно получить дисперсионное уравнение с любой степенью точности.

В работе [2] уравнение (4) решалось разложением подынтегральной функции в ряд Фурье по синусам. Никаких условий на величину отношения g/b здесь не накладывали.

В квазистатическом приближении, где пренебрегали зависимостью β_n от частоты для $n \geq 1$, это дало уравнение вида

$$\cos \psi = \beta_0 D - \frac{b \beta_0}{\pi} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi g}{b} \cdot \sin \beta_0 D. \quad (6)$$

Аналогично может быть получено дисперсионное уравнение во втором приближении с пренебрежением зависимости β_n от частоты, начиная с $n \geq 2$, т. е. с учетом двух типов волн

$$\cos \psi = a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}, \quad (7)$$

$$a_1 = \frac{\cos \beta_0 D + \operatorname{ch} |\beta_1| D}{2} + \frac{|\beta_1| b}{6\pi} \cdot \frac{1 - \sin^6 \xi}{\sin^6 \xi} \cdot \operatorname{sh} |\beta_1| D - \frac{\beta_0 b}{2\pi} \cdot \operatorname{ctg}^2 \xi \cdot \frac{1 - \cos^6 \xi}{\sin^6 \xi} \cdot \sin \beta_0 D, \quad \text{где } \xi = \frac{\pi g}{b},$$

$$a_2 = \cos \beta_0 D \cdot \operatorname{ch} |\beta_1| D + \frac{|\beta_1| \beta_0}{3\pi} \cdot \frac{1 - \sin^6 \xi}{\sin^6 \xi} \cdot \operatorname{sh} |\beta_1| D \cos \beta_0 D -$$

$$-\frac{\beta_0 b}{\pi} \cdot \operatorname{ctg}^2 \xi \cdot \frac{1 - \cos^6 \xi}{\sin^6 \xi} \cdot \sin \beta_0 D \cdot \operatorname{ch} |\beta_1| D - \frac{\beta_0 |\beta_1| b^2}{3\pi^2} \cdot \operatorname{ctg}^8 \xi \cdot \operatorname{ch} |\beta_1| D \cdot \sin \beta_0 D.$$

В работе [3] исследовались волноводы прямоугольного сечения с малыми отверстиями щели для пролета пучка, т. е. $g/b \ll 1$. Поле здесь на отверстиях диафрагм, в отличие от [2], задавалось в виде полинома. В результате получилось уравнение, подобное (6), если $\operatorname{ctg} x$ разложить по малому аргументу, что может быть при малой величине отношения g/b , и ограничиться первым членом

$$\cos \psi = \cos \beta_0 D - \frac{b \beta_0}{\pi} \cdot \left(\frac{\beta}{\pi g} \right)^2 \cdot \sin \beta_0 D. \quad (8)$$

По уравнениям (6), (7), (8) был проведен расчет дисперсионных кривых и сравнен с экспериментом из работы [4]. Размеры камеры брались следующие: $b = 7,74$ см, $a = 7$ см; $2g = 2$ см; $D = 2,5$ см, $t = 0,6$ см.

Тип волны, который возбуждался в камере, был LE_{11} . Результаты расчета и эксперимента нанесены на рис. 2. Из рисунка видно, что экспериментальная кривая несколько смещена в коротковолновую область относительно теоретических кривых. Это смещение, очевидно, происходит за счет влияния толщины диафрагм, поскольку в теоретических расчетах толщина диафрагм не учитывалась.

Из хода кривых видно, что при $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi$ ближе всех к экспериментальной

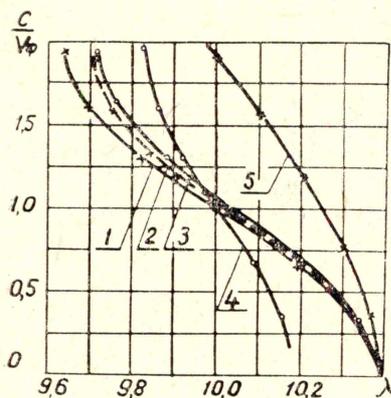


Рис. 2. Сравнение теоретических дисперсионных кривых с экспериментом:

1 — кривая, рассчитанная по формуле (6); 2 — кривая второго приближения, рассчитанная по формуле (7); 3 — кривая, рассчитанная по формуле (8); 4 — экспериментальная кривая; 5 — кривая, рассчитанная методом шивания в нулевом приближении

будет заменить более простым расчетом по формуле (8). Таким образом, из рассмотренного видно, что метод нормальных волн в его различных модификациях может быть использован для исследования дисперсионных свойств волноводов прямоугольного сечения с небольшим числом диафрагм на длину волны в волноводе, т. е. при работе в режиме, близком к π -режиму колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Владимирский. ЖТФ, XVII, 1269, 1947.
2. Е. С. Коваленко. Теория ускоряющих устройств электронных синхротронов. Диссертация, ТГУ, Томск, 1961.
3. А. Н. Диденко. ЖТФ, XXXV, 5, 1965.
4. А. П. Ольшанский. Вопросы возбуждения резонаторной системы волноводного циклического ускорителя. Диссертация, ТПИ, Томск, 1963.