свою деятельность) за 2002 г. Ставка исполнения составляет 4,96 %.

Напомним, что контракт, определяющий верхнее граничное значение процентной ставки, называется кэпом. Кэп состоит из серии кэплетов, представляющих собой контракты со сроками погашения платежа в момент времени $T+\tau$ на выплату разницы между рыночным значением ставки R_T в момент времени T и значением ставки X в течение периода τ, основная сумма при этом составляет L. Главным условием является то, что данная разность должна быть положительна, то есть стоимость (*payoff*) кэплета в момент $T+\tau$ составляет [2]:

$$\max L[(R_T-X),0].$$

На практике калибровка модели Халла-Уайта осуществляется путем выбора значений параметров, характеризующих поведение процентной ставки и волатильности таким образом, чтобы они соответствовали рыночным ценам опционов. Эмпирические значения параметра a принадлежат интервалу [0, 0,1], значение же параметра σ принадлежат интервалу [0,01, 0,03] [5]. При калибровке начальные значения параметров a и σ принимались равными 0,1 и 0,01 соответственно.

Параметры определяются при помощи метода наименьших квадратов таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений цен, полученных по модели Халла-Уайта, и рыночных цен опционов, была минимальной. В работе при выводе выражения применяли методы финансовой математики и теории опционов. Для проверки адекватности полученных результатов использовалась рыночная информация, основные расчеты и калибровка выражения были произведены с использованием пакета Mathematica.

В результате калибровки модели были получены следующие значения параметров: $\{a\rightarrow 0{,}108114, \sigma\rightarrow 0{,}0112018\}$. Зная параметры модели, можно рассчитать цену свопциона, дающего держателю право осуществлять платежи при ставке процента 6,2 % согласно условиям 3-летнего свопа, действие которого начинается через 5 лет. Волатильность процентной ставки свопа составляет 20 %. Платежи осуществляются раз в полугодие, основная сумма долга составляет 100 USD.

Применив (2), получим значение стоимости свопционного контракта – 2,0035. Рыночная стоимость данного свопционного контракта составляет 2,0038 (данные предоставлены компанией «Эконофизика-Томск»). Таким образом, полученное выражение позволяет оценить стоимость свопционного контракта, при этом отклонение модельной цены от соответствующей рыночной не превышает 1 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and Corporate Liabilities // Journal of political economy. – 1973. – № 6. – P. 637–659.
2. Wilmott P. Derivatives: the theory and practice of financial engineering. – N.Y.: John Willey & Sons, 2000. – 742 p.
3. Hull J., White A. One-factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities // The Journal of Financial and Quantitative analysis. – 1993. – № 2. – P. 235–240.
4. Hull J. Options, futures and other derivatives. – Toronto: University of Toronto, 2002. – 680 p.
5. Marshall J.F., Kapner K.P. Understanding swap finance. – OH: South-Western, 1990. – 250 p.
6. Keith R. An introduction to derivatives. – N.Y.: John Willey & Sons, 2000. – 198 p.

УДК 533.6.011

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ДИВЕРГЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В.М. Галкин

Томский политехнический университет
E-mail: vlg@tpu.ru

Предлагается итерационный метод решения дифференциальных уравнений, имеющих дивергентный вид и описывающих одномерное стационарное течение с переходом через скорость звука. Метод основан на использовании априорной информации о монотонном возрастании числа Маха вдоль сопла. Сравнение с другими методами проводилось на точном решении, а также при расчете двухфазного течения.

Введение

В [1] был предложен и далее в [2] уточнен итерационный метод решения одномерных стационарных уравнений газовой динамики, который за счет использования априорной информации о монотонном изменении числа Маха внутри рассматриваемой области по скорости сходимости на порядок превосходит метод установления на основе схемы Маккормака [3] и имеет простой алгоритм.

В этом методе в качестве переменных используется полная энтальпия и энтропийная функция, а наличие в уравнениях правых частей позволяет учесть неравновесные процессы.

Однако, как отмечено в [4], методы, использующие уравнения, записанные в виде законов сохранения массы, импульса и энергии, имеют преимущества перед недивергентной формой записи. Кроме того, запись в дивергентной форме имеет более простой вид по сравнению с записью, используемой в [1]. Поэтому в данной статье рассматривается дальнейшее развитие метода [1]. Предлагаемый ниже подход, обладая простотой метода [1] и несколько уступая ему в скорости, использует дивергентную форму записи уравнений.

Математическая постановка задачи

Рассмотрим течение в сопле с переходом через скорость звука. Ставится задача нахождения параметров течения ρ, U, P, удовлетворяющих одномерным стационарным уравнениям для идеального совершенного газа при наличии неравновесных процессов. Уравнения записаны в дивергентном виде [5]:

$$\frac{dA\rho U}{dx}=0,\quad \frac{dA(\rho U^2+P)}{dx}=A'P+AC_1,$$

$$\frac{dA\rho UH}{dx}=AC_2, \tag{1}$$

где: $H=P\gamma/(\rho(\gamma-1))+U^2/2$ – полная энтальпия; ρ, U, P, γ – плотность, скорость, давление и показатель адиабаты газа; A – площадь поперечного сечения сопла; x – продольная координата, принадлежащая рассматриваемой области $[x_a;x_b]$; C_1 и C_2 – известные, в общем случае нелинейно зависящие от параметров газа правые части уравнений движения и энергии, связанные с неравновесными процессами. Штрих обозначает производную по «x». Все величины безразмерны. Переход к безразмерным переменным производился путем отнесения: x – к половине размера минимального сечения, A – к площади в минимальном сечении $\min(A)$, U – к критической скорости U_*, ρ – к критической плотности ρ_*, P – к произведению $\rho_* U_*^2$, H – к квадрату критической скорости U_*^2.

Полагается, что задана площадь сопла $A(x)$; на входе в сопло заданы граничные условия в виде $H=H(x_a)$, $S=S(x_a)$, где $S=P/\rho^\gamma$ – энтропийная функция; $C_1(x_a)=C_2(x_a)=0$. В качестве априорной используется информация о том, что существует только одна внутренняя точка x_*, в которой число Маха $M=1$; внутри рассматриваемой области число Маха монотонно возрастает от дозвуковой до сверхзвуковой величины и не равно нулю:

$$M(x)\neq 0,\ x\in[x_a;x_b],$$

$$M(x_a)<1,\ M(x_b)>1,\ M(x_*)=1,\ x_*\in(x_a;x_b). \tag{2}$$

Вместо первого уравнения в (1) воспользуемся его интегралом $A\rho U=G$, где G – неизвестная константа. Введем обозначения:

$$R_1=A(\rho U^2+P),\quad R_2=A\rho UH, \tag{3}$$

$$L=\frac{(\gamma R_1)^2}{2R_2(\gamma^2-1)}. \tag{4}$$

При этом второе и третье уравнения в (1) примут вид:

$$\frac{dR_1}{dx}=A'P+AC_1,\quad \frac{dR_2}{dx}=AC_2. \tag{5}$$

Обратный переход от R_1, R_2, G к переменным ρ, U, P производится по следующим формулам:

$$U=\frac{\gamma R_1}{G(\gamma+1)}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma R_1}{G(\gamma+1)}\right)^2-2\frac{(\gamma-1)R_2}{G(\gamma+1)}},$$

$$\rho=\frac{G}{AU},\quad P=\frac{R_1}{A}-\rho U^2, \tag{6}$$

где знак +(–) соответствует сверхзвуковому (дозвуковому) течению.

Из условий (2) следует, что существует единственная точка $x=x_*$, в которой

$$(M^2-1)^2=\min.$$

Очевидно, что при этом выполняются соотношения:

$$G=L(x_*),\quad x_*=\arg(\min\{L(x),x\in(x_a;x_b)\}), \tag{7}$$

$$\left.\frac{dL}{dx}\right|_{x_*}=0. \tag{8}$$

Таким образом, если в рассматриваемой области известно распределение $R_1(x)$ и $R_2(x)$, то соотношения (4), (7) и (6) позволяют определить критическое сечение x_*, расход G и величины ρ, U, P.

Поскольку распределение $R_1(x)$ и $R_2(x)$ находится из решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (5), то рассмотрим нахождение граничных условий для этих уравнений. Предположим, что расход G известен. Так как имеются $H(x_a)$, $S(x_a)$, $C_1(x_a)=0$, $C_2(x_a)=0$, то в сечении x_a можно найти U, ρ и P из соотношений:

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\left(\frac{G}{A}\right)^{\gamma-1}S(x_a)+\frac{U^{\gamma+1}}{2}-H(x_a)U^{\gamma-1}=0,$$

$$\rho=\frac{G}{AU},\quad P=\rho^\gamma S(x_a). \tag{9}$$

Подставляя найденные значения в (3), получим граничные условия $R_1(x_a)$ и $R_2(x_a)$ для уравнений (5).

Численный алгоритм

С учетом выше изложенного для решения системы уравнений (1) предлагается следующий алгоритм:

1. Вводится расчетная сетка x_i и сеточные функции ρ_i, U_i, P_i, R_{1i}, R_{2i}, $i=0,1,\ldots,k$, где k – число точек сетки. Обозначим через верхний индекс j номер итерации.
2. Задается $j=1$, G и начальное приближение ρ_i, U_i, P_i, удовлетворяющее (2).

3. С использованием (3) находится $\max\{R_{1i}, i=0,...,k\}$ и присваивается всем $R_{1i}^{(1)}$.
4. Переход к следующей итерации: $j=j+1$. По значениям ρ_i, U_i, P_i вычисляются правые части для уравнений (5).
5. Из (9) находятся граничные условия $R_1(x_a)$ и $R_2(x_a)$ для уравнений (5).
6. Из задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (5) находятся R_{1i} и R_{2i}; используется схема Эйлера второго порядка точности.
7. Для ускорения сходимости с использованием R_{1i} выполняется нижняя релаксация: $R_{1i}^{(j)}=R_{1i}^{(j-1)}+\omega(R_{1i}-R_{1i}^{(j-1)})$, где j – номер текущей итерации, $R_{1i}^{(j-1)}$ – значение с предыдущей итерации, $R_{1i}^{(j)}$ – будет использоваться на текущей итерации, R_{1i} – вычислено на текущей итерации, ω – параметр релаксации, $0<\omega<1$.
8. Из (7) определяется x_*. Так как при использовании сеточных функций значение x_* будет принадлежать дискретному множеству $\{x_0,...,x_k\}$, то более точное x_* находится следующим образом. Пусть $L_1=\min\{i=1,...,k\}$. Параболическая интерполяция функции L по трем точкам и (8) дает:
$$x_*=\frac{(x_I^2-x_{I+1}^2)L_{I-1}+(x_{I+1}^2-x_{I-1}^2)L_I+(x_{I-1}^2-x_I^2)L_{I+1}}{2((x_I-x_{I+1})L_{I-1}+(x_{I+1}-x_{I-1})L_I+(x_{I-1}-x_I)L_{I+1})}.$$
Далее, используя x_*, уточняем G:
$$G=L_{I-1}\frac{(x_*-x_I)(x_*-x_{I+1})}{(x_{I-1}-x_I)(x_{I-1}-x_{I+1})}+$$
$$+L_I\frac{(x_*-x_{I-1})(x_*-x_{I+1})}{(x_I-x_{I-1})(x_I-x_{I+1})}+L_{I+1}\frac{(x_*-x_{I-1})(x_*-x_I)}{(x_{I+1}-x_{I-1})(x_{I+1}-x_I)}.$$
9. Из уравнений (6) вычисляются ρ_i, U_i, P_i; если $x_i<x_*$, выбирается дозвуковое решение, в противном случае – сверхзвуковое.
10. При необходимости следующей итерации производится переход на пункт 4.

Сравнение с точным решением

Здесь и в следующем разделе рассматривалось течение в радиусно коническом сопле Лаваля, которое с учетом обезразмеривания описывалось зависимостью $A(x)=y^2(x)$, где:
$$y(x)=\begin{cases}3{,}125, \quad x\le x_1, \quad x_1=-0{,}5-3{,}25\sin(0{,}785398)\\ 2{,}125+\sqrt{1-(x-x_1)^2}, \quad x\in(x_1;x_2], \quad x_2=x_1+\sin(0{,}785398)\\ 1{,}625-x+2x_3, \quad x\in(x_2;x_3], \quad x_3=-0{,}625\sin(0{,}785398)\\ 1{,}625-\sqrt{0{,}625^2-x^2}, \quad x\in(x_3;x_4], \quad x_4=0{,}625\sin(0{,}261799)\\ 1{,}625-0{,}625\cos(0{,}261799)+(x-x_4)\mathrm{tg}(0{,}261799), \quad x>x_4\end{cases},$$
$x_a=-4$, $x_b=2$, $\gamma=1{,}4$, число точек сетки $k=40$, начальное поле параметров (пункт 2) находилось с использованием соотношения из [6]:
$$\frac{\min(A)}{A}=M\left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}\right)^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))}.$$
Для получения точного решения в качестве правых частей использовались соотношения из [7]:
$$C_1=\frac{H\rho}{H_0}\left(\frac{N'}{N}-\frac{A'}{A}-\frac{S'}{(1-\gamma)S}\right)+\frac{\rho^\gamma S'}{1-\gamma},$$
$$C_2=\frac{UH\rho}{H_0}\left(\frac{N'}{N}-\frac{A'}{A}-\frac{S'}{(1-\gamma)S}\right),$$
здесь $N=A_a[b_2((x-x_*)/(x_a-x_*))^2+1-b_2]$; $S=S_0[b_1(x-x_a)+1]$; $H=H_0[(S_0/S)^\gamma N/A]^{1/H_0}$; $A_a=A(x_a)$; $b_2=0{,}5$; $b_1=0{,}2$; $H_0=(\gamma+1)/(2(\gamma-1))$; $S_0=1/\gamma$. Критическое сечение задано: $x_*=1$.

Использование указанных правых частей позволяет найти точное решение в виде:
$$M\left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}\right)^{H_0}=\frac{\min(N)}{N},$$
$$U=M\left(\frac{2(\gamma-1)H}{2+(\gamma-1)M^2}\right)^{1/2}, \quad \rho=\frac{\min(N)}{AU}, \quad P=S\rho^\gamma.$$

На рис. 1 изображено положение точки x_* в процессе решения: 1 – предлагаемым методом, при $\omega=0{,}1$; 2 – итерационным методом [1]; 3 – методом установления с использованием явной схемы Маккормака [3]. Для всех методов решение сходится к точному решению $x_*=1$. Предлагаемый метод, немного уступая итерационному методу [1], на порядок превосходит метод установления по скорости сходимости.

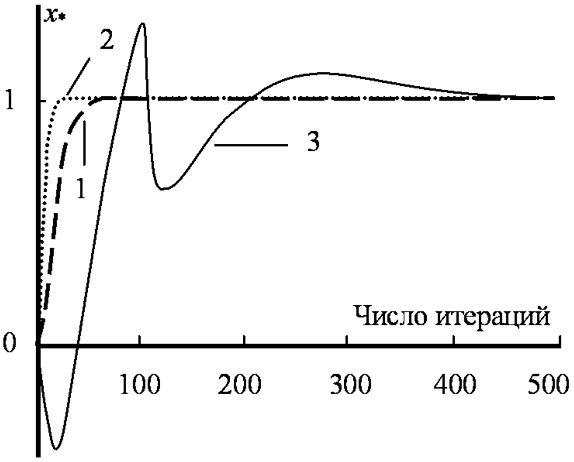

Рис. 1. *Точное решение. Сходимость разных методов*

На рис. 2 показано влияние параметра ω на сходимость итерационного процесса в предложенном методе. Необходимо отметить, что при малых правых частях уравнений (1) можно использовать большое значение параметра ω, однако при этом увеличивается вероятность появления осцилляций. Для ускорения сходимости можно первоначальное значение ω изменять через несколько итераций. На рис. 2 номеру 1 соответствует $\omega=0{,}06$; 2 – $\omega=0{,}08$; 3 – $\omega=0{,}1$; 4 – $\omega=\begin{cases}0{,}1; & j\le 10\\ 0{,}2; & j>10\end{cases}$. В последнем случае видно заметное ускорение сходимости.

На рис. 3 приведен профиль сопла и полученное распределение числа Маха, которое для всех рассматриваемых методов сошлось к точному решению, при этом $x_*=1$.

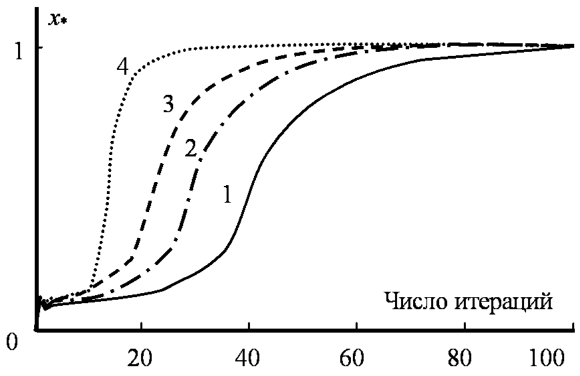

Рис. 2. *Точное решение. Влияние ω на сходимость предложенного метода*

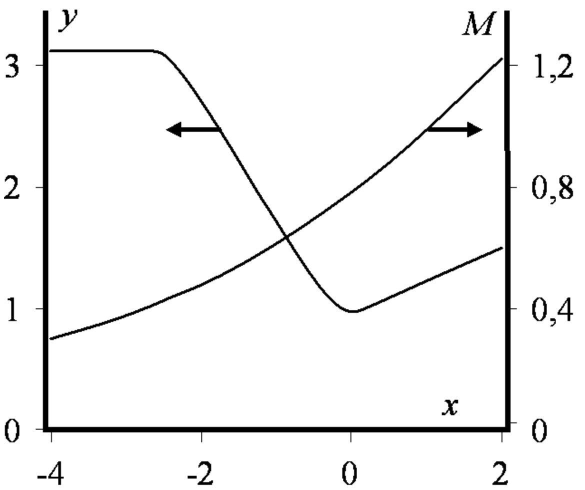

Рис. 3. *Профиль сопла Лаваля и распределение числа Маха вдоль него*

Сравнение для двухфазного течения

С использованием упомянутых методов были проведены расчеты двухфазного неравновесного течения в сопле Лаваля. Начальное поле параметров (пункт 2) находилось аналогично предыдущему разделу. Конденсация, испарение, коагуляция и дробление частиц второй фазы не рассматривались. Коэффициенты межфазного взаимодействия и особенности расчета параметров второй фазы приведены соответственно в [1] и [8]. Использовались следующие параметры: давление торможения $50\cdot10^5$ Па; температура торможения T_0=3000 K; динамическая вязкость газа $5\cdot10^{-5}$ Па·с при T_0; весовая доля второй фазы 0,4; число Прандтля 0,7; теплоемкость вещества второй фазы 1420 Дж/(кг·K); молекулярная масса смеси 30 кг/кмоль; показатель адиабаты газа 1,1; вторая фаза монодисперсная, состоящая из Al_2O_3; диаметр частиц второй фазы 10^{-5} м.

Кроме этого в описанном выше алгоритме изменены пункты 3 и 7:

– пункт 3 – по формулам (3) вычисляются $R_{1i}^{(1)}$ и $R_{2i}^{(1)}$;
– пункт 7 – выполнялись релаксации: $R_{1i}^{(j)}=R_{1i}^{(j-1)}+\omega(R_{1i}-R_{1i}^{(j-1)})$ и $R_{2i}^{(j)}=R_{2i}^{(j-1)}+\omega(R_{2i}-R_{2i}^{(j-1)})$, а ω изменялось следующим образом:

$$\omega=\begin{cases}0{,}9; & j\le 5\\ 0{,}45; & j>5\end{cases}.$$

Полученные результаты продемонстрировали сходимость к решению $x_*\approx0{,}137$, аналогичную представленной на рис. 1. Процесс сходимости показан в таблице, где для разных номеров итерации j приводятся разности x_* на двух соседних итерациях.

Таблица. *Сходимость разных методов. Значения abs($x_*^{(j-1)}-x_*^{(j)}$)*

Номер итерации	Предлагаемый метод	Метод [1]	Метод установления [3]
5	$3{,}2\cdot10^{-2}$	$3{,}3\cdot10^{-2}$	$1{,}4\cdot10^{-2}$
10	$1{,}3\cdot10^{-5}$	$5{,}7\cdot10^{-5}$	$8{,}1\cdot10^{-3}$
15	$7{,}2\cdot10^{-8}$	$8{,}5\cdot10^{-7}$	$5{,}9\cdot10^{-3}$
20	$3{,}3\cdot10^{-9}$	$1{,}1\cdot10^{-9}$	$2{,}9\cdot10^{-3}$
500	$2{,}6\cdot10^{-9}$	0	$5{,}7\cdot10^{-5}$
920	$1{,}2\cdot10^{-10}$	0	$9{,}4\cdot10^{-6}$

Видно, что если в методе установлении с использованием явной схемы Маккормака [3] до совпадения 6 цифр после запятой требовалось около 900 итераций, то в предлагаемом методе и в методе [1] было достаточно 15 итераций.

Заключение

Изложенный итерационный метод решения уравнений газовой динамики унаследовал простоту и скорость сходимости ранее предложенного метода, но в отличие от последнего использует уравнения в дивергентной форме. Это позволяет рекомендовать приводимый метод для расчета одномерных стационарных неравновесных газодинамических течений, имеющих единственный переход через скорость звука с монотонным возрастанием числа Маха вдоль рассматриваемой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галкин В.М. Итерационный метод решения одномерных уравнений газовой динамики // Известия Томского политехнического университета. – 2002. – Т. 305. – № 8. – С. 130–136.
2. Галкин В.М. О методе решения одномерных стационарных уравнений газовой динамики. // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 11. – С. 30–36.
3. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hyperbolicity impact cratering // AIAA Paper. – 1969. – № 354. – 17 p.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
5. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
7. Галкин В.М. Пример точного решении и тестовые расчеты для одномерных стационарных уравнений газовой динамики // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 1. – С. 3–9.
8. Глазунов А.А., Рычков А.Д. Исследование двухфазных неравновесных течений в осесимметричных соплах // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – № 6. – С. 86–91.